Chapitre IX : Fonctions vectorielles d'une variable réelle

PSI*

Octobre 2022

Lycée d'Arsonval

On considère ici des applications définies sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, d'intérieur non vide, et à valeurs dans un espace vectoriel normé E.

DÉFINITIONS

Dérivée en un point

Définition 1

Soit f une application de I dans E, et $t_0 \in I$.

On dit que <u>f est dérivable en t_0</u> si $\displaystyle\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{1}{t - t_0} \cdot \big(f(t) - f(t_0)\big)$ existe.

Dans ce cas, cette limite se note $f'(t_0)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t_0)$ et s'appelle le <u>vecteur dérivé de f en t_0</u>.

Dérivée en un point

Définition 1

Soit f une application de I dans E, et $t_0 \in I$.

On dit que $\underline{f \text{ est dérivable en } t_0}$ si $\displaystyle\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{1}{t - t_0} \cdot \big(f(t) - f(t_0)\big)$ existe.

Dans ce cas, cette limite se note $f'(t_0)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t_0)$ et s'appelle le <u>vecteur dérivé de f en t_0</u>.

Remarques

1. Ainsi, dire que f est dérivable en t_0 s'écrit :

$$\exists\, \ell \in E,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0 \text{ tel que } \forall\, t \in I,\ t \neq t_0 \text{ et } |t - t_0| < \alpha \Longrightarrow \left\| \frac{1}{t - t_0} \cdot \big(f(t) - f(t_0)\big) - \ell \right\| < \epsilon$$

Dérivée en un point

Définition 1

Soit f une application de I dans E, et $t_0 \in I$.

On dit que $\underline{f \text{ est dérivable en } t_0}$ si $\displaystyle \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{1}{t - t_0} \cdot \big(f(t) - f(t_0)\big)$ existe.

Dans ce cas, cette limite se note $f'(t_0)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t_0)$ et s'appelle le vecteur dérivé de f en t_0.

Remarques

1. Ainsi, dire que f est dérivable en t_0 s'écrit :

$$\exists\, \ell \in E,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0 \text{ tel que } \forall\, t \in I,\ t \neq t_0 \text{ et } |t - t_0| < \alpha \Longrightarrow \left\| \frac{1}{t - t_0} \cdot \big(f(t) - f(t_0)\big) - \ell \right\| < \epsilon$$

ou encore :

$$\exists\, \ell \in E,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0 \text{ tq } \forall\, t \in I,\ t \neq t_0 \text{ et } |t - t_0| < \alpha \Longrightarrow \|f(t) - f(t_0) - (t - t_0) \cdot \ell\| < \varepsilon\, |t - t_0|$$

Dérivée en un point

Définition 1

Soit f une application de I dans E, et $t_0 \in I$.

On dit que f est dérivable en t_0 si $\displaystyle\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{1}{t - t_0} \cdot (f(t) - f(t_0))$ existe.

Dans ce cas, cette limite se note $f'(t_0)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t_0)$ et s'appelle le vecteur dérivé de f en t_0.

Remarques

1. Ainsi, dire que f est dérivable en t_0 s'écrit :

$$\exists\, \ell \in E,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0 \text{ tel que } \forall\, t \in I,\ t \neq t_0 \text{ et } |t - t_0| < \alpha \Longrightarrow \left\| \frac{1}{t - t_0} \cdot (f(t) - f(t_0)) - \ell \right\| < \epsilon$$

ou encore :

$$\exists\, \ell \in E,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0 \text{ tq } \forall\, t \in I,\ t \neq t_0 \text{ et } |t - t_0| < \alpha \Longrightarrow \|f(t) - f(t_0) - (t - t_0) \cdot \ell\| < \varepsilon\, |t - t_0|$$

ou encore :

$$\exists\, \ell \in E \text{ tel que } f(t) \underset{t \to t_0}{=} f(t_0) + (t - t_0) \cdot \ell + \vec{o}(t - t_0)\,.$$

Cette dernière expression s'appelle un développement limité de f au voisinage de t_0.

Dérivée en un point

Définition 1

Soit f une application de I dans E, et $t_0 \in I$.

On dit que f est dérivable en t_0 si $\displaystyle\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{1}{t - t_0} \cdot (f(t) - f(t_0))$ existe.

Dans ce cas, cette limite se note $f'(t_0)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t_0)$ et s'appelle le vecteur dérivé de f en t_0.

Remarques

1. Ainsi, dire que f est dérivable en t_0 s'écrit :

$$\exists\, \ell \in E,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0 \text{ tel que } \forall\, t \in I,\ t \neq t_0 \text{ et } |t - t_0| < \alpha \Longrightarrow \left\| \frac{1}{t - t_0} \cdot (f(t) - f(t_0)) - \ell \right\| < \epsilon$$

ou encore :

$$\exists\, \ell \in E,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0 \text{ tq } \forall\, t \in I,\ t \neq t_0 \text{ et } |t - t_0| < \alpha \Longrightarrow \|f(t) - f(t_0) - (t - t_0) \cdot \ell\| < \varepsilon\, |t - t_0|$$

ou encore :

$$\exists\, \ell \in E \text{ tel que } f(t) \underset{t \to t_0}{=} f(t_0) + (t - t_0) \cdot \ell + \overrightarrow{o}(t - t_0)\,.$$

Cette dernière expression s'appelle un développement limité de f au voisinage de t_0.

De la même façon que pour les fonctions à valeurs réelles, $\overrightarrow{o}(t - t_0)$ désigne une fonction **à valeurs dans E** de la forme $(t - t_0)\overrightarrow{\varepsilon}(t)$ où $\displaystyle\lim_{t \to t_0} \overrightarrow{\varepsilon}(t) = 0_E$.

Remarques

2. En posant $h = t - t_0$, on peut écrire aussi (sous réserve d'existence) : $f'(t_0) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \dfrac{1}{h} \cdot \big(f(t_0 + h) - f(t_0)\big)$,

   et le développement limité de f au voisinage de t_0 peut s'écrire : $f(t_0 + h) \underset{h \to 0}{=} f(t_0) + h \cdot f'(t_0) + \overrightarrow{o}(h)$.

Remarques

2. En posant $h = t - t_0$, on peut écrire aussi (sous réserve d'existence) : $f'(t_0) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \dfrac{1}{h} \cdot \big(f(t_0 + h) - f(t_0)\big)$,

   et le développement limité de f au voisinage de t_0 peut s'écrire : $f(t_0 + h) \underset{h \to 0}{=} f(t_0) + h \cdot f'(t_0) + \overrightarrow{o}(h)$.

Définition 2

Soit f une application de I dans E, et $t_0 \in I$.

- On dit que <u>f est dérivable à droite en t_0</u> si $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} \dfrac{1}{t - t_0} \cdot \big(f(t) - f(t_0)\big)$ existe. Dans ce cas, cette limite se note $f'_d(t_0)$, et se nomme le <u>vecteur dérivé à droite de f en t_0</u>.
- On dit que <u>f est dérivable à gauche en t_0</u> si $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} \dfrac{1}{t - t_0} \cdot \big(f(t) - f(t_0)\big)$ existe. Dans ce cas, cette limite se note $f'_g(t_0)$, et se nomme le <u>vecteur dérivé à gauche de f en t_0</u>.

Remarques

2. En posant $h = t - t_0$, on peut écrire aussi (sous réserve d'existence) : $f'(t_0) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \dfrac{1}{h} \cdot \big(f(t_0 + h) - f(t_0)\big)$,

   et le développement limité de f au voisinage de t_0 peut s'écrire : $f(t_0 + h) \underset{h \to 0}{=} f(t_0) + h \cdot f'(t_0) + \overrightarrow{o}(h)$.

Définition 2

Soit f une application de I dans E, et $t_0 \in I$.

- On dit que <u>f est dérivable à droite en t_0</u> si $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} \dfrac{1}{t - t_0} \cdot \big(f(t) - f(t_0)\big)$ existe. Dans ce cas, cette limite se note $f'_d(t_0)$, et se nomme le <u>vecteur dérivé à droite de f en t_0</u>.
- On dit que <u>f est dérivable à gauche en t_0</u> si $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} \dfrac{1}{t - t_0} \cdot \big(f(t) - f(t_0)\big)$ existe. Dans ce cas, cette limite se note $f'_g(t_0)$, et se nomme le <u>vecteur dérivé à gauche de f en t_0</u>.

Proposition 1

Soit f une application de I dans E, et $t_0 \in \overset{\circ}{I}$.

Pour que f soit dérivable en t_0, il faut et il suffit qu'elle soit dérivable à droite et à gauche en ce point, et que $f'_g(t_0) = f'_d(t_0)$ (et, dans ce cas, $f'(t_0) = f'_g(t_0) = f'_d(t_0)$).

Remarques

2. En posant $h = t - t_0$, on peut écrire aussi (sous réserve d'existence) : $f'(t_0) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \dfrac{1}{h} \cdot \big(f(t_0 + h) - f(t_0)\big)$,

   et le développement limité de f au voisinage de t_0 peut s'écrire : $f(t_0 + h) \underset{h \to 0}{=} f(t_0) + h \cdot f'(t_0) + \overrightarrow{o}(h)$.

Définition 2

Soit f une application de I dans E, et $t_0 \in I$.

- On dit que <u>f est dérivable à droite en t_0</u> si $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t > t_0}} \dfrac{1}{t - t_0} \cdot \big(f(t) - f(t_0)\big)$ existe. Dans ce cas, cette limite se note $f'_d(t_0)$, et se nomme le <u>vecteur dérivé à droite de f en t_0</u>.
- On dit que <u>f est dérivable à gauche en t_0</u> si $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} \dfrac{1}{t - t_0} \cdot \big(f(t) - f(t_0)\big)$ existe. Dans ce cas, cette limite se note $f'_g(t_0)$, et se nomme le <u>vecteur dérivé à gauche de f en t_0</u>.

Proposition 1

Soit f une application de I dans E, et $t_0 \in \mathring{I}$.

Pour que f soit dérivable en t_0, il faut et il suffit qu'elle soit dérivable à droite et à gauche en ce point, et que $f'_g(t_0) = f'_d(t_0)$ (et, dans ce cas, $f'(t_0) = f'_g(t_0) = f'_d(t_0)$).

Démonstration

Découle immédiatement du résultat correspondant sur les limites.

Proposition 2

Si f est dérivable (**resp.** dérivable à gauche, **resp.** dérivable à droite) en t_0, **alors** f est continue (**resp.** continue à gauche, **resp.** continue à droite) en t_0.

Proposition 2

Si f est dérivable (**resp.** dérivable à gauche, **resp.** dérivable à droite) en t_0, **alors** f est continue (**resp.** continue à gauche, **resp.** continue à droite) en t_0.

Démonstration

En effet, si f est dérivable en t_0, elle y admet le développement limité

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + \overrightarrow{o}(t - t_0).$$

On en déduit immédiatement $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} f(t) = f(t_0)$, c'est-à-dire la continuité de f en t_0.

Proposition 2

Si f est dérivable (**resp.** dérivable à gauche, **resp.** dérivable à droite) en t_0, **alors** f est continue (**resp.** continue à gauche, **resp.** continue à droite) en t_0.

Démonstration

En effet, si f est dérivable en t_0, elle y admet le développement limité

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + \overrightarrow{o}(t - t_0).$$

On en déduit immédiatement $\lim\limits_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} f(t) = f(t_0)$, c'est-à-dire la continuité de f en t_0.

La réciproque de cette propriété est FAUSSE !

Il existe des fonctions continues et non dérivables (on peut même construire des applications continues partout, mais dérivables nulle part !).

Exemple

Il suffit par exemple de considérer l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array} \right.$.

f est évidemment continue sur $\mathbb{R}$ (elle est lipschitzienne de rapport 1), mais elle n'est pas dérivable en 0 (car $f_g'(0) = -1$ et $f_d'(0) = 1$).

Cas de la dimension finie

Théorème 1

On suppose E de dimension finie, rapporté à une base $(e_1, \dots, e_n)$.
Soit f une application de I dans E. Pour tout $t \in I$, on peut écrire :

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) e_i$$

où les $f_i \colon I \to \mathbb{K}$ sont les applications coordonnées de f.

Alors, f est dérivable en t_0 si et seulement si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, f_i est dérivable en t_0, et on a alors :

$$f'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(t_0) e_i\ .$$

Cas de la dimension finie

Théorème 1

On suppose E de dimension finie, rapporté à une base $(e_1, \ldots, e_n)$.
Soit f une application de I dans E. Pour tout $t \in I$, on peut écrire :

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) e_i$$

où les $f_i \colon I \to \mathbb{K}$ sont les applications coordonnées de f.

Alors, f est dérivable en t_0 si et seulement si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, f_i est dérivable en t_0, et on a alors :

$$f'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(t_0) e_i\,.$$

Démonstration

Cela découle immédiatement d'un théorème similaire sur les limites, puisque, pour tout $t \neq t_0$,

$$\frac{1}{t - t_0} \cdot \big(f(t) - f(t_0)\big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i(t) - f_i(t_0)}{t - t_0} e_i\,.$$

Cas de la dimension finie

Théorème 1

On suppose E de dimension finie, rapporté à une base $(e_1, \dots, e_n)$.
Soit f une application de I dans E. Pour tout $t \in I$, on peut écrire :

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)e_i$$

où les $f_i : I \to \mathbb{K}$ sont les applications coordonnées de f.

Alors, f est dérivable en t_0 si et seulement si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, f_i est dérivable en t_0, et on a alors :

$$f'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(t_0)e_i\,.$$

Exemples

1. Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est dérivable en $t_0 \in I$ si et seulement si les fonctions $\mathcal{R}e\,(f)$ et $\mathcal{I}m\,(f)$ le sont, et on a alors
$$f'(t_0) = (\mathcal{R}e\,(f))'(t_0) + \mathrm{i}(\mathcal{I}m\,(f))'(t_0).$$

Cas de la dimension finie

Théorème 1

On suppose E de dimension finie, rapporté à une base $(e_1, \dots, e_n)$.
Soit f une application de I dans E. Pour tout $t \in I$, on peut écrire :

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) e_i$$

où les $f_i : I \to \mathbb{K}$ sont les applications coordonnées de f.

Alors, f est dérivable en t_0 si et seulement si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, f_i est dérivable en t_0, et on a alors :

$$f'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(t_0) e_i \,.$$

Exemples

1. Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ est dérivable en $t_0 \in I$ si et seulement si les fonctions $\mathcal{R}e\,(f)$ et $\mathcal{I}m\,(f)$ le sont, et on a alors
$$f'(t_0) = (\mathcal{R}e\,(f))'(t_0) + \mathrm{i}(\mathcal{I}m\,(f))'(t_0).$$

2. Une application $f : \left\{ \begin{array}{ccl} I & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & A(t) = \big(a_{i,j}(t)\big)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}} \end{array} \right.$ est dérivable en t_0 si et seulement si pour tout $(i,j) \in [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;q]\!]$ les fonctions coefficients $t \mapsto a_{i,j}(t)$ le sont, et dans ce cas la matrice $A'(t_0)$ est la matrice dont les coefficients sont les $a'_{i,j}(t_0)$.

Dérivabilité sur un intervalle

Définition 3

Une application $f : I \longrightarrow E$ est dite dérivable sur I si pour tout $t_0 \in I$, f est dérivable en t_0.

Si tel est le cas, on peut définir l'application dérivée de f : $f' : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & f'(t) \end{array} \right.$

L'ensemble des applications dérivables sur I à valeurs dans E sera noté $\mathscr{D}(I, E)$.

Dérivabilité sur un intervalle

Définition 3

Une application $f : I \longrightarrow E$ est dite dérivable sur I si pour tout $t_0 \in I$, f est dérivable en t_0.

Si tel est le cas, on peut définir l'application dérivée de f : $f' : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ t & \longmapsto & f'(t) \end{array} \right.$

L'ensemble des applications dérivables sur I à valeurs dans E sera noté $\mathscr{D}(I, E)$.

Définition 4

Une application $f : I \longrightarrow E$ est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et si f' est en plus continue sur I.

On notera $\mathscr{C}^1(I, E)$ l'ensemble des applications de classe $\mathscr{C}^1$ sur I à valeurs dans E.

OPÉRATIONS SUR LES DÉRIVÉES

Proposition 3

Soient f et g deux applications de I dans E, dérivables en t_0.

Alors l'application $f+g$ est dérivable en t_0, et $(f+g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0)$.

Proposition 3

Soient f et g deux applications de I dans E, dérivables en t_0.

Alors l'application $f+g$ est dérivable en t_0, et $(f+g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0)$.

Démonstration

Par hypothèse, on a les développements limités d'ordre 1 au voisinage de t_0 :

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0).f'(t_0) + (t - t_0).\overrightarrow{\varepsilon}_1(t) \quad \text{et} \quad g(t) = g(t_0) + (t - t_0).g'(t_0) + (t - t_0).\overrightarrow{\varepsilon}_2(t)$$

avec $\lim\limits_{t \to t_0} \overrightarrow{\varepsilon}_i(t) = 0$,

Proposition 3

Soient f et g deux applications de I dans E, dérivables en t_0.

Alors l'application $f+g$ est dérivable en t_0, et $(f+g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0)$.

Démonstration

Par hypothèse, on a les développements limités d'ordre 1 au voisinage de t_0 :

$$f(t) = f(t_0) + (t-t_0).f'(t_0) + (t-t_0).\overrightarrow{\varepsilon}_1(t) \quad \text{et} \quad g(t) = g(t_0) + (t-t_0).g'(t_0) + (t-t_0).\overrightarrow{\varepsilon}_2(t)$$

avec $\lim\limits_{t \to t_0} \overrightarrow{\varepsilon}_i(t) = 0$, d'où en additionnant :

$$(f+g)(t) = (f+g)(t_0) + (t-t_0).[f'(t_0) + g'(t_0)] + (t-t_0).\overrightarrow{\varepsilon}(t)$$

avec $\overrightarrow{\varepsilon} = \overrightarrow{\varepsilon}_1 + \overrightarrow{\varepsilon}_2$ qui tend vers 0 quand $t \longrightarrow t_0$, ce qui démontre la proposition.

Proposition 3

Soient f et g deux applications de I dans E, dérivables en t_0.

Alors l'application $f+g$ est dérivable en t_0, et $(f+g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0)$.

Proposition 4

Soit f une application de I dans E, et λ une application de I dans $\mathbb{K}$, dérivables en t_0.

Alors l'application $\lambda.f$ est dérivable en t_0 et $(\lambda.f)'(t_0) = \lambda'(t_0).f(t_0) + \lambda(t_0).f'(t_0)$.

En particulier, si $\alpha \in \mathbb{K}$ est constant, αf est dérivable en t_0 et $(\alpha f)'(t_0) = \alpha f'(t_0)$.

Proposition 3

Soient f et g deux applications de I dans E, dérivables en t_0.

Alors l'application $f+g$ est dérivable en t_0, et $(f+g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0)$.

Proposition 4

Soit f une application de I dans E, et λ une application de I dans $\mathbb{K}$, dérivables en t_0.

Alors l'application $\lambda.f$ est dérivable en t_0 et $(\lambda.f)'(t_0) = \lambda'(t_0).f(t_0) + \lambda(t_0).f'(t_0)$.

En particulier, si $\alpha \in \mathbb{K}$ est constant, αf est dérivable en t_0 et $(\alpha f)'(t_0) = \alpha f'(t_0)$.

Démonstration

Par hypothèse, on a les développements limités d'ordre 1 au voisinage de t_0 :

$$f(t) = f(t_0) + (t-t_0).f'(t_0) + (t-t_0).\overrightarrow{\varepsilon}_1(t) \quad \text{et} \quad \lambda(t) = \lambda(t_0) + (t-t_0)\lambda'(t_0) + (t-t_0)\varepsilon_2(t)$$

où $\overrightarrow{\varepsilon}_1$ (resp.ε_2) est une application à valeurs dans E (resp. dans $\mathbb{K}$) qui tend vers 0_E (resp.$0_{\mathbb{K}}$) quand t tend vers t_0.

Proposition 3

Soient f et g deux applications de I dans E, dérivables en t_0.

Alors l'application $f+g$ est dérivable en t_0, et $(f+g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0)$.

Proposition 4

Soit f une application de I dans E, et λ une application de I dans $\mathbb{K}$, dérivables en t_0.

Alors l'application $\lambda.f$ est dérivable en t_0 et $(\lambda.f)'(t_0) = \lambda'(t_0).f(t_0) + \lambda(t_0).f'(t_0)$.

En particulier, si $\alpha \in \mathbb{K}$ est constant, αf est dérivable en t_0 et $(\alpha f)'(t_0) = \alpha f'(t_0)$.

Démonstration

Par hypothèse, on a les développements limités d'ordre 1 au voisinage de t_0 :

$$f(t) = f(t_0) + (t-t_0).f'(t_0) + (t-t_0).\overrightarrow{\varepsilon}_1(t) \quad \text{et} \quad \lambda(t) = \lambda(t_0) + (t-t_0)\lambda'(t_0) + (t-t_0)\varepsilon_2(t)$$

où $\overrightarrow{\varepsilon}_1$ (resp.ε_2) est une application à valeurs dans E (resp. dans $\mathbb{K}$) qui tend vers 0_E (resp.$0_{\mathbb{K}}$) quand t tend vers t_0. D'où, en effectuant la multiplication externe :

$$\lambda(t).f(t) = \lambda(t_0).f(t_0) + (t-t_0)[\lambda(t_0).f'(t_0) + \lambda'(t_0).f(t_0)] + (t-t_0).\overrightarrow{\varepsilon}_3(t)$$

où $\overrightarrow{\varepsilon}_3(t) = \ldots$ tend vers 0 quand $t \longrightarrow t_0$, ce qui démontre la proposition.

Proposition 3

Soient f et g deux applications de I dans E, dérivables en t_0.

Alors l'application $f+g$ est dérivable en t_0, et $(f+g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0)$.

Proposition 4

Soit f une application de I dans E, et λ une application de I dans $\mathbb{K}$, dérivables en t_0.

Alors l'application $\lambda.f$ est dérivable en t_0 et $(\lambda.f)'(t_0) = \lambda'(t_0).f(t_0) + \lambda(t_0).f'(t_0)$.

En particulier, si $\alpha \in \mathbb{K}$ est constant, αf est dérivable en t_0 et $(\alpha f)'(t_0) = \alpha f'(t_0)$.

Corollaire:

> L'ensemble $\mathscr{D}(I, E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(I, E)$, et l'application $f \mapsto f'$ est linéaire de $\mathscr{D}(I, E)$ dans $\mathcal{A}(I, E)$.

Théorème 2

Soient E, F deux espaces vectoriels normés, f une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E, et L une application linéaire continue de E dans F.

Si f est dérivable en t_0, $L \circ f$ l'est aussi et : $(L \circ f)'(t_0) = L[f'(t_0)]$

Théorème 2

Soient E, F deux espaces vectoriels normés, f une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E, et L une application linéaire continue de E dans F.

Si f est dérivable en t_0, $L \circ f$ l'est aussi et : $(L \circ f)'(t_0) = L[f'(t_0)]$

Démonstration

Pour $t \in I$, $t \neq t_0$, on a $\dfrac{1}{t - t_0}\big(L[f(t)] - L[f(t_0)]\big) \underset{L \text{ linéaire}}{=} L\left(\dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}\right) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} L[f'(t_0)]$ car L continue.

Théorème 2

Soient E, F deux espaces vectoriels normés, f une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E, et L une application linéaire continue de E dans F.

Si f est dérivable en t_0, $L \circ f$ l'est aussi et : $(L \circ f)'(t_0) = L[f'(t_0)]$

Démonstration

Pour $t \in I$, $t \neq t_0$, on a $\dfrac{1}{t - t_0}\big(L[f(t)] - L[f(t_0)]\big) \underset{L \text{ linéaire}}{=} L\left(\dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}\right) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} L[f'(t_0)]$ car L continue.

Exemple

Soit $t \mapsto A(t)$ une application dérivable de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors l'application $t \mapsto A^\top(t)$ est dérivable et : $\forall\, t \in I,\ \left(A^\top\right)'(t) = (A')^\top(t)$.

Théorème 2

Soient E, F deux espaces vectoriels normés, f une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E, et L une application linéaire continue de E dans F.

Si f est dérivable en t_0, $L \circ f$ l'est aussi et : $(L \circ f)'(t_0) = L[f'(t_0)]$

Démonstration

Pour $t \in I$, $t \neq t_0$, on a $\dfrac{1}{t - t_0}\big(L[f(t)] - L[f(t_0)]\big) \underset{L \text{ linéaire}}{=} L\left(\dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}\right) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} L[f'(t_0)]$ car L continue.

Exemple

Soit $t \mapsto A(t)$ une application dérivable de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Alors l'application $t \mapsto A^\top(t)$ est dérivable et : $\forall\, t \in I,\ \left(A^\top\right)'(t) = (A')^\top(t)$.

(on applique le théorème précédent avec $L\colon \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^\top \end{array}$ qui est linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie donc continue).

Théorème 3

Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, et $B : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire **continue**.
Soient $f : I \longrightarrow E$ et $g : I \longrightarrow F$ deux applications dérivables en $t_0 \in I$.

Alors l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & B\big(f(t), g(t)\big) \end{array} \right.$ est dérivable en t_0 et

$$\varphi'(t_0) = B\big(f'(t_0), g(t_0)\big) + B\big(f(t_0), g'(t_0)\big).$$

Théorème 3

Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, et $B : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire **continue**.
Soient $f : I \longrightarrow E$ et $g : I \longrightarrow F$ deux applications dérivables en $t_0 \in I$.

Alors l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & B\big(f(t), g(t)\big) \end{array} \right.$ est dérivable en t_0 et

$$\varphi'(t_0) = B\big(f'(t_0), g(t_0)\big) + B\big(f(t_0), g'(t_0)\big).$$

Démonstration

Pour $t \in I$, B étant bilinéaire, on a

$$B\big(f(t), g(t)\big) - B\big(f(t_0), g(t_0)\big) = B\big(f(t) - f(t_0), g(t)\big) + B\big(f(t_0), g(t) - g(t_0)\big)$$

Théorème 3

Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, et $B : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire **continue**.
Soient $f : I \longrightarrow E$ et $g : I \longrightarrow F$ deux applications dérivables en $t_0 \in I$.

Alors l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & B\big(f(t), g(t)\big) \end{array} \right.$ est dérivable en t_0 et

$$\varphi'(t_0) = B\big(f'(t_0), g(t_0)\big) + B\big(f(t_0), g'(t_0)\big).$$

Démonstration

Pour $t \in I$, B étant bilinéaire, on a

$$B\big(f(t), g(t)\big) - B\big(f(t_0), g(t_0)\big) = B\big(f(t) - f(t_0), g(t)\big) + B\big(f(t_0), g(t) - g(t_0)\big)$$

d'où, toujours en utilisant la bilinéarité de B :

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} = B\left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}, g(t)\right) + B\left(f(t_0), \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}\right)$$

Théorème 3

Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, et $B : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire **continue**.
Soient $f : I \longrightarrow E$ et $g : I \longrightarrow F$ deux applications dérivables en $t_0 \in I$.

Alors l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & B\big(f(t), g(t)\big) \end{array} \right.$ est dérivable en t_0 et

$$\varphi'(t_0) = B\big(f'(t_0), g(t_0)\big) + B\big(f(t_0), g'(t_0)\big).$$

Démonstration

Pour $t \in I$, B étant bilinéaire, on a

$$B\big(f(t), g(t)\big) - B\big(f(t_0), g(t_0)\big) = B\big(f(t) - f(t_0), g(t)\big) + B\big(f(t_0), g(t) - g(t_0)\big)$$

d'où, toujours en utilisant la bilinéarité de B :

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} = B\left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}, g(t)\right) + B\left(f(t_0), \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}\right)$$

Puisque f est dérivable en t_0, que g est continue (car dérivable) en t_0 et que B est continue, on a :

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} B\left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}, g(t)\right) = B\big(f'(t_0), g(t_0)\big)$$

Théorème 3

Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, et $B : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire **continue**.
Soient $f : I \longrightarrow E$ et $g : I \longrightarrow F$ deux applications dérivables en $t_0 \in I$.

Alors l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & B\big(f(t), g(t)\big) \end{array} \right.$ est dérivable en t_0 et

$$\varphi'(t_0) = B\big(f'(t_0), g(t_0)\big) + B\big(f(t_0), g'(t_0)\big).$$

Démonstration

Pour $t \in I$, B étant bilinéaire, on a

$$B\big(f(t), g(t)\big) - B\big(f(t_0), g(t_0)\big) = B\big(f(t) - f(t_0), g(t)\big) + B\big(f(t_0), g(t) - g(t_0)\big)$$

d'où, toujours en utilisant la bilinéarité de B :

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} = B\left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}, g(t)\right) + B\left(f(t_0), \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}\right)$$

Puisque f est dérivable en t_0, que g est continue (car dérivable) en t_0 et que B est continue, on a :

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} B\left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}, g(t)\right) = B\big(f'(t_0), g(t_0)\big)$$

et de même

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} B\left(f(t_0), \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}\right) = B\big(f(t_0), g'(t_0)\big)$$

Théorème 3

Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, et $B : E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire **continue**.
Soient $f : I \longrightarrow E$ et $g : I \longrightarrow F$ deux applications dérivables en $t_0 \in I$.

Alors l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & B\big(f(t), g(t)\big) \end{array} \right.$ est dérivable en t_0 et

$$\varphi'(t_0) = B\big(f'(t_0), g(t_0)\big) + B\big(f(t_0), g'(t_0)\big).$$

Démonstration

Pour $t \in I$, B étant bilinéaire, on a

$$B\big(f(t), g(t)\big) - B\big(f(t_0), g(t_0)\big) = B\big(f(t) - f(t_0), g(t)\big) + B\big(f(t_0), g(t) - g(t_0)\big)$$

d'où, toujours en utilisant la bilinéarité de B :

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} = B\left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}, g(t)\right) + B\left(f(t_0), \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}\right)$$

Puisque f est dérivable en t_0, que g est continue (car dérivable) en t_0 et que B est continue, on a :

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} B\left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}, g(t)\right) = B\big(f'(t_0), g(t_0)\big)$$

et de même

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ t \neq t_0}} B\left(f(t_0), \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}\right) = B\big(f(t_0), g'(t_0)\big)$$

d'où le résultat.

Applications

1. Soient $t \mapsto M(t)$ et $t \mapsto N(t)$ deux applications dérivables de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   Alors l'application $t \mapsto M(t)N(t)$ est dérivable sur I et :

$$\forall\, t \in I,\ (MN)'(t) = M'(t)N(t) + M(t)N'(t)\,.$$

Applications

1. Soient $t \mapsto M(t)$ et $t \mapsto N(t)$ deux applications dérivables de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   Alors l'application $t \mapsto M(t)N(t)$ est dérivable sur I et :

$$\forall\, t \in I,\ (MN)'(t) = M'(t)N(t) + M(t)N'(t)\,.$$

   En effet, l'application $B\colon \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (M,N) & \longmapsto & MN \end{array}$ est bilinéaire (propriétés des lois dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), et continue car $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie.

Applications

1. Soient $t \mapsto M(t)$ et $t \mapsto N(t)$ deux applications dérivables de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   Alors l'application $t \mapsto M(t)N(t)$ est dérivable sur I et :

   $$\forall\, t \in I,\ (MN)'(t) = M'(t)N(t) + M(t)N'(t)\,.$$

   En effet, l'application $B\colon \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (M,N) & \longmapsto & MN \end{array}$ est bilinéaire (propriétés des lois dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), et continue car $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie.

2. Soit E un espace préhilbertien réel, muni d'un produit scalaire $(x,y) \in E^2 \mapsto \langle x \mid y \rangle \in \mathbb{R}$.
   Ce produit scalaire est une forme bilinéaire continue, car $\forall\,(x,y) \in E^2,\ |\langle x \mid y \rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (cf. la caractérisation de la continuité d'une application bilinéaire dans le chapitre précédent).

Applications

1. Soient $t \mapsto M(t)$ et $t \mapsto N(t)$ deux applications dérivables de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   Alors l'application $t \mapsto M(t)N(t)$ est dérivable sur I et :

$$\forall\, t \in I,\ (MN)'(t) = M'(t)N(t) + M(t)N'(t)\,.$$

   En effet, l'application $B\colon \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (M, N) & \longmapsto & MN \end{array}$ est bilinéaire (propriétés des lois dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), et continue car $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie.

2. Soit E un espace préhilbertien réel, muni d'un produit scalaire $(x, y) \in E^2 \mapsto \langle x \mid y \rangle \in \mathbb{R}$.
   Ce produit scalaire est une forme bilinéaire continue, car $\forall\,(x, y) \in E^2,\ |\langle x \mid y \rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (cf. la caractérisation de la continuité d'une application bilinéaire dans le chapitre précédent).

   Donc, si f et g sont deux applications définies sur I, à valeurs dans E et dérivables, alors l'application :

   $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \langle f(t) \mid g(t) \rangle \end{array} \right.$ est dérivable, et l'on a : $\langle f \mid g \rangle' = \langle f' \mid g \rangle + \langle f \mid g' \rangle$.

Applications

1. Soient $t \mapsto M(t)$ et $t \mapsto N(t)$ deux applications dérivables de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

   Alors l'application $t \mapsto M(t)N(t)$ est dérivable sur I et :

   $$\forall\, t \in I,\ (MN)'(t) = M'(t)N(t) + M(t)N'(t)\,.$$

   En effet, l'application $B\colon \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (M,N) & \longmapsto & MN \end{array}$ est bilinéaire (propriétés des lois dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), et continue car $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie.

2. Soit E un espace préhilbertien réel, muni d'un produit scalaire $(x,y) \in E^2 \mapsto \langle x \,|\, y\rangle \in \mathbb{R}$.
   Ce produit scalaire est une forme bilinéaire continue, car $\forall\,(x,y) \in E^2,\ |\langle x \,|\, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (cf. la caractérisation de la continuité d'une application bilinéaire dans le chapitre précédent).

   Donc, si f et g sont deux applications définies sur I, à valeurs dans E et dérivables, alors l'application :

   $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \langle f(t) \,|\, g(t)\rangle \end{array} \right.$ est dérivable, et l'on a : $\langle f \,|\, g\rangle' = \langle f' \,|\, g\rangle + \langle f \,|\, g'\rangle$.

   On en déduit ensuite que, si $f : I \longrightarrow E$ est dérivable en t_0 et si $f(t_0) \neq 0$, l'application $t \mapsto \|f(t)\|$ est dérivable en t_0, et $\|f\|'(t_0) = \dfrac{\langle f(t_0) \,|\, f'(t_0)\rangle}{\|f(t_0)\|}$.

En adaptant légèrement la démonstration, le théorème précédent est facilement généralisable :

En adaptant légèrement la démonstration, le théorème précédent est facilement généralisable :

Théorème 4

Soient $E_1, \dots, E_n$ et F des espaces vectoriels normés, et $M\colon E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ une application n-linéaire continue.

Pour $i \in [\![1\,;n]\!]$, soient $f_i : I \longrightarrow E_i$ n applications dérivables sur I.

Alors l'application $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & F \\ t & \longmapsto & M\big(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\big) \end{array}\right.$ est dérivable sur I , et, pour tout $t \in I$:

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} M\big(f_1(t), \dots, f_{i-1}(t), f_i'(t), f_{i+1}(t), \dots, f_n(t)\big)\,.$$

En adaptant légèrement la démonstration, le théorème précédent est facilement généralisable :

Théorème 4

Soient $E_1, \dots, E_n$ et F des espaces vectoriels normés, et $M\colon E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ une application n-linéaire continue.

Pour $i \in [\![1\,;n]\!]$, soient $f_i : I \longrightarrow E_i$ n applications dérivables sur I.

Alors l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & F \\ t & \longmapsto & M\big(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\big) \end{array} \right.$ est dérivable sur I , et, pour tout $t \in I$:

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} M\big(f_1(t), \dots, f_{i-1}(t), f_i'(t), f_{i+1}(t), \dots, f_n(t)\big) .$$

Applications

1. Si $f_1, \dots, f_n$ sont n applications dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, leur produit $g : t \mapsto f_1(t)f_2(t)\cdots f_n(t)$ est dérivable sur I et

$$\forall\, t \in I,\;\; g'(t) = f_1'(t)f_2(t)\cdots f_n(t) + f_1(t)f_2'(t)f_3(t)\cdots f_n(t) + \cdots + f_1(t)f_2(t)\cdots f_{n-1}(t)f_n'(t).$$

En adaptant légèrement la démonstration, le théorème précédent est facilement généralisable :

Théorème 4

Soient $E_1, \dots, E_n$ et F des espaces vectoriels normés, et $M\colon E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ une application n-linéaire continue.
Pour $i \in [\![1\,;n]\!]$, soient $f_i : I \longrightarrow E_i$ n applications dérivables sur I.

Alors l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & F \\ t & \longmapsto & M\big(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\big) \end{array} \right.$ est dérivable sur I , et, pour tout $t \in I$:

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} M\big(f_1(t), \dots, f_{i-1}(t), f_i'(t), f_{i+1}(t), \dots, f_n(t)\big) .$$

Applications

1. Si $f_1, \dots, f_n$ sont n applications dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$, leur produit $g : t \mapsto f_1(t)f_2(t)\cdots f_n(t)$ est dérivable sur I et

$$\forall\, t \in I,\ g'(t) = f_1'(t)f_2(t)\cdots f_n(t) + f_1(t)f_2'(t)f_3(t)\cdots f_n(t) + \cdots + f_1(t)f_2(t)\cdots f_{n-1}(t)f_n'(t).$$

2. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et si $\mathscr{B}$ est une base de E, l'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$ est n-linéaire, donc continue (car E est de dimension finie).

Soit $A : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & A(t) \end{array} \right.$ une application dérivable sur I. Si on note $C_1(t), \dots, C_n(t)$ les colonnes de la matrice $A(t)$, alors les applications $t \mapsto C_i(t)$ sont dérivables sur I (car leurs fonctions coordonnées le sont). Par suite, l'application $\varphi : t \mapsto \det(A(t))$ est dérivable sur I et :

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \det\big(C_1(t), \dots, C_{i-1}(t), C_i'(t), C_{i+1}(t), \dots, C_n(t)\big).$$

Exercice d'application

Pour tout réel x, on pose : $D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & & \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \dots & \dots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$.

Montrer que D_n est une fonction dérivable et calculer $D_n'(x)$. En déduire l'expression de $D_n(x)$.

Exercice d'application

Pour tout réel x, on pose : $D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & & \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \dots & \dots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$.

Montrer que D_n est une fonction dérivable et calculer $D_n'(x)$. En déduire l'expression de $D_n(x)$.

Solution

Puisque le déterminant d'une matrice est une somme de produits de termes de la matrice (un par ligne et par colonne), D_n est un polynôme en x, donc est dérivable.

Exercice d'application

Pour tout réel x, on pose : $D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & & \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \dots & \dots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$.

Montrer que D_n est une fonction dérivable et calculer $D_n'(x)$. En déduire l'expression de $D_n(x)$.

Solution

Puisque le déterminant d'une matrice est une somme de produits de termes de la matrice (un par ligne et par colonne), D_n est un polynôme en x, donc est dérivable.

En notant C_j les colonnes de la matrice, on a $C'j = C_{j+1}$ pour $j \in [\![1\,;n-1]\!]$ donc en utilisant la formule précédente, il reste $D_n' = det(C_1, C_2, \dots, C_{n-1}, C_n')$ et en développant selon la dernière colonne, on trouve $D_n' = D_{n-1}$.

Exercice d'application

Pour tout réel x, on pose : $D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & & \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \dots & \dots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$.

Montrer que D_n est une fonction dérivable et calculer $D_n'(x)$. En déduire l'expression de $D_n(x)$.

Solution

Puisque le déterminant d'une matrice est une somme de produits de termes de la matrice (un par ligne et par colonne), D_n est un polynôme en x, donc est dérivable.

En notant C_j les colonnes de la matrice, on a $C'j = C_{j+1}$ pour $j \in [\![1\,;n-1]\!]$ donc en utilisant la formule précédente, il reste $D_n' = det(C_1, C_2, \dots, C_{n-1}, C_n')$ et en développant selon la dernière colonne, on trouve $D_n' = D_{n-1}$.

On en déduit facilement par récurrence $D_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$ (compte tenu de $D_n(0) = 0$).

Théorème 5: Fonction composée

Soit $\varphi : I \longrightarrow J$ et $f : J \longrightarrow E$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé.

Soit $t_0 \in I$. Si φ est dérivable en t_0 et si f est dérivable en $\varphi(t_0)$, alors $f \circ \varphi$ est dérivable en t_0 et

$$(f \circ \varphi)'(t_0) = \varphi'(t_0).f'[\varphi(t_0)]$$

Théorème 5: Fonction composée

Soit $\varphi : I \longrightarrow J$ et $f : J \longrightarrow E$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé.

Soit $t_0 \in I$. Si φ est dérivable en t_0 et si f est dérivable en $\varphi(t_0)$, alors $f \circ \varphi$ est dérivable en t_0 et

$$(f \circ \varphi)'(t_0) = \varphi'(t_0).f'[\varphi(t_0)]$$

Démonstration

Par hypothèse, on a le développement limité d'ordre 1 au voisinage de t_0 :

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + (t - t_0)\varphi'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon_1(t) \quad \text{avec} \lim_{t \to t_0} \varepsilon_1(t) = 0_{\mathbb{K}}$$

Théorème 5: Fonction composée

Soit $\varphi : I \longrightarrow J$ et $f : J \longrightarrow E$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé.

Soit $t_0 \in I$. Si φ est dérivable en t_0 et si f est dérivable en $\varphi(t_0)$, alors $f \circ \varphi$ est dérivable en t_0 et

$$(f \circ \varphi)'(t_0) = \varphi'(t_0).f'[\varphi(t_0)]$$

Démonstration

Par hypothèse, on a le développement limité d'ordre 1 au voisinage de t_0 :

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + (t - t_0)\varphi'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon_1(t) \quad \text{avec } \lim_{t \to t_0} \varepsilon_1(t) = 0_{\mathbb{K}}$$

et le développement limité d'ordre 1 au voisinage de $\varphi(t_0)$:

$$f(y) = f(\varphi(t_0)) + (y - \varphi(t_0)).f'[\varphi(t_0)] + (y - \varphi(t_0)).\overrightarrow{\varepsilon}_2(y) \quad \text{avec } \lim_{y \to \varphi(t_0)} \overrightarrow{\varepsilon}_2(y) = 0_E.$$

Théorème 5: Fonction composée

Soit $\varphi : I \longrightarrow J$ et $f : J \longrightarrow E$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé.

Soit $t_0 \in I$. Si φ est dérivable en t_0 et si f est dérivable en $\varphi(t_0)$, alors $f \circ \varphi$ est dérivable en t_0 et

$$(f \circ \varphi)'(t_0) = \varphi'(t_0).f'[\varphi(t_0)]$$

Démonstration

Par hypothèse, on a le développement limité d'ordre 1 au voisinage de t_0 :

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + (t - t_0)\varphi'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon_1(t) \quad \text{avec } \lim_{t \to t_0} \varepsilon_1(t) = 0_{\mathbb{K}}$$

et le développement limité d'ordre 1 au voisinage de $\varphi(t_0)$:

$$f(y) = f(\varphi(t_0)) + (y - \varphi(t_0)).f'[\varphi(t_0)] + (y - \varphi(t_0)).\overrightarrow{\varepsilon}_2(y) \quad \text{avec } \lim_{y \to \varphi(t_0)} \overrightarrow{\varepsilon}_2(y) = 0_E.$$

On en déduit, en remplaçant y dans la 2ème équation par $\varphi(t)$ obtenue dans la 1ère :

$$f\circ\varphi(t) = f\circ\varphi(t_0)+(t-t_0)\varphi'(t_0).f'[\varphi(t_0)]+(t-t_0)\varepsilon_1(t).f'[\varphi(t_0)]+[(t-t_0)\varphi'(t_0)+(t-t_0)\varepsilon_1(t)].\overrightarrow{\varepsilon}_2(\varphi(t))$$

Théorème 5: Fonction composée

Soit $\varphi : I \longrightarrow J$ et $f : J \longrightarrow E$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé.

Soit $t_0 \in I$. Si φ est dérivable en t_0 et si f est dérivable en $\varphi(t_0)$, alors $f \circ \varphi$ est dérivable en t_0 et

$$(f \circ \varphi)'(t_0) = \varphi'(t_0).f'[\varphi(t_0)]$$

Démonstration

Par hypothèse, on a le développement limité d'ordre 1 au voisinage de t_0 :

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + (t - t_0)\varphi'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon_1(t) \quad \text{avec} \lim_{t \to t_0} \varepsilon_1(t) = 0_{\mathbb{K}}$$

et le développement limité d'ordre 1 au voisinage de $\varphi(t_0)$:

$$f(y) = f(\varphi(t_0)) + (y - \varphi(t_0)).f'[\varphi(t_0)] + (y - \varphi(t_0)).\overrightarrow{\varepsilon}_2(y) \quad \text{avec} \lim_{y \to \varphi(t_0)} \overrightarrow{\varepsilon}_2(y) = 0_E.$$

On en déduit, en remplaçant y dans la 2ème équation par $\varphi(t)$ obtenue dans la 1ère :

$$f\circ\varphi(t) = f\circ\varphi(t_0)+(t-t_0)\varphi'(t_0).f'[\varphi(t_0)]+(t-t_0)\varepsilon_1(t).f'[\varphi(t_0)]+[(t-t_0)\varphi'(t_0)+(t-t_0)\varepsilon_1(t)].\overrightarrow{\varepsilon}_2(\varphi(t))$$

soit une expression de la forme (calculs non détaillés) :

$$f \circ \varphi(t) = f \circ \varphi(t_0) + (t - t_0)\varphi'(t_0).f'[\varphi(t_0)] + (t - t_0)\overrightarrow{\varepsilon}_3(t) \quad \text{avec} \lim_{t \to t_0} \overrightarrow{\varepsilon}_3(t) = 0_E$$

Théorème 5: Fonction composée

Soit $\varphi : I \longrightarrow J$ et $f : J \longrightarrow E$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé.

Soit $t_0 \in I$. Si φ est dérivable en t_0 et si f est dérivable en $\varphi(t_0)$, alors $f \circ \varphi$ est dérivable en t_0 et

$$(f \circ \varphi)'(t_0) = \varphi'(t_0).f'[\varphi(t_0)]$$

Démonstration

Par hypothèse, on a le développement limité d'ordre 1 au voisinage de t_0 :

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + (t - t_0)\varphi'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon_1(t) \quad \text{avec } \lim_{t \to t_0} \varepsilon_1(t) = 0_{\mathbb{K}}$$

et le développement limité d'ordre 1 au voisinage de $\varphi(t_0)$:

$$f(y) = f(\varphi(t_0)) + (y - \varphi(t_0)).f'[\varphi(t_0)] + (y - \varphi(t_0)).\overrightarrow{\varepsilon}_2(y) \quad \text{avec } \lim_{y \to \varphi(t_0)} \overrightarrow{\varepsilon}_2(y) = 0_E.$$

On en déduit, en remplaçant y dans la 2ème équation par $\varphi(t)$ obtenue dans la 1ère :

$$f \circ \varphi(t) = f \circ \varphi(t_0) + (t - t_0)\varphi'(t_0).f'[\varphi(t_0)] + (t - t_0)\varepsilon_1(t).f'[\varphi(t_0)] + [(t - t_0)\varphi'(t_0) + (t - t_0)\varepsilon_1(t)].\overrightarrow{\varepsilon}_2(\varphi(t))$$

soit une expression de la forme (calculs non détaillés) :

$$f \circ \varphi(t) = f \circ \varphi(t_0) + (t - t_0)\varphi'(t_0).f'[\varphi(t_0)] + (t - t_0)\overrightarrow{\varepsilon}_3(t) \quad \text{avec } \lim_{t \to t_0} \overrightarrow{\varepsilon}_3(t) = 0_E$$

ce qui est bien un développement limité d'ordre 1 de $f \circ \varphi$ au voisinage de t_0, et donne le résultat annoncé.

DÉRIVÉES SUCCESSIVES

Définition 5

Soit f une application de I dans E. On peut définir par récurrence, si elles existent, les dérivées successives de f de la façon suivante :

- on pose $f^{(0)} = f$ (dérivée d'ordre zéro)
- pour $k \in \mathbb{N}^*$, on dira que f est k fois dérivable sur I si $f^{(k-1)}$ est dérivable sur I et on pose alors $f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'$ (dérivée d'ordre k).

On notera $\mathscr{D}^n(I, E)$ l'ensemble des applications n fois dérivables sur I à valeurs dans E.

Définition 5

Soit f une application de I dans E. On peut définir par récurrence, si elles existent, les dérivées successives de f de la façon suivante :

- on pose $f^{(0)} = f$ (dérivée d'ordre zéro)
- pour $k \in \mathbb{N}^*$, on dira que f est k fois dérivable sur I si $f^{(k-1)}$ est dérivable sur I et on pose alors $f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'$ (dérivée d'ordre k).

On notera $\mathscr{D}^n(I, E)$ l'ensemble des applications n fois dérivables sur I à valeurs dans E.

On dira que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I ; on note $\mathscr{C}^n(I, E)$ l'ensemble des applications de classe $\mathscr{C}^n$ sur I à valeurs dans E.

Enfin on dira que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si elle est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on notera $\mathscr{C}^\infty(I, E)$ l'ensemble des applications de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I à valeurs dans E.

Définition 5

Soit f une application de I dans E. On peut définir par récurrence, si elles existent, les dérivées successives de f de la façon suivante :

- on pose $f^{(0)} = f$ (dérivée d'ordre zéro)
- pour $k \in \mathbb{N}^*$, on dira que f est k fois dérivable sur I si $f^{(k-1)}$ est dérivable sur I et on pose alors $f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'$ (dérivée d'ordre k).

On notera $\mathscr{D}^n(I, E)$ l'ensemble des applications n fois dérivables sur I à valeurs dans E.

On dira que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I ; on note $\mathscr{C}^n(I, E)$ l'ensemble des applications de classe $\mathscr{C}^n$ sur I à valeurs dans E.

Enfin on dira que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si elle est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on notera $\mathscr{C}^\infty(I, E)$ l'ensemble des applications de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I à valeurs dans E.

Proposition 5

$\mathscr{D}^n(I, E)$, $\mathscr{C}^n(I, E)$ et $\mathscr{C}^\infty(I, E)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{A}(I, E)$.

Si $f, g \in \mathscr{D}^n(I, E)$ et si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a : $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.

Définition 5

Soit f une application de I dans E. On peut définir par récurrence, si elles existent, les dérivées successives de f de la façon suivante :

- on pose $f^{(0)} = f$ (dérivée d'ordre zéro)
- pour $k \in \mathbb{N}^*$, on dira que f est k fois dérivable sur I si $f^{(k-1)}$ est dérivable sur I et on pose alors $f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'$ (dérivée d'ordre k).

On notera $\mathscr{D}^n(I, E)$ l'ensemble des applications n fois dérivables sur I à valeurs dans E.

On dira que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I ; on note $\mathscr{C}^n(I, E)$ l'ensemble des applications de classe $\mathscr{C}^n$ sur I à valeurs dans E.

Enfin on dira que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I si elle est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on notera $\mathscr{C}^\infty(I, E)$ l'ensemble des applications de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I à valeurs dans E.

Proposition 5

$\mathscr{D}^n(I, E)$, $\mathscr{C}^n(I, E)$ et $\mathscr{C}^\infty(I, E)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{A}(I, E)$.

Si $f, g \in \mathscr{D}^n(I, E)$ et si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a : $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.

Proposition 6

On suppose E de dimension finie, rapporté à une base $(e_1, \ldots, e_n)$.

Soit f une application de I dans E. Pour tout $t \in I$, on peut écrire $f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)e_i$. où les $f_i : I \to \mathbb{K}$ sont les applications coordonnées de f.

Alors, f est k-fois dérivable [respectivement de classe $\mathscr{C}^k$] sur I si et seulement si, pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, f_i est k fois dérivable [respectivement de classe $\mathscr{C}^k$] sur I, et on a alors : $\forall\, t \in I$, $f^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^{n} {f_i}^{(k)}(t)e_i$.

Théorème 6: Formule de Leibniz

Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, et $B\colon E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire continue.

Soient $f : I \longrightarrow E$ et $g : I \longrightarrow F$ deux applications n fois dérivables [resp. de classe $\mathscr{C}^n$] sur I .

Alors l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & B(f(t), g(t)) \end{array} \right.$ est n fois dérivable [resp. de classe $\mathscr{C}^n$] sur I, et on a :

$$\forall\, t \in I,\ \varphi^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B\big(f^{(k)}(t), g^{(n-k)}(t)\big).$$

Théorème 6: Formule de Leibniz

Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, et $B\colon E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire continue.

Soient $f : I \longrightarrow E$ et $g : I \longrightarrow F$ deux applications n fois dérivables [resp. de classe $\mathscr{C}^n$] sur I .

Alors l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & B(f(t), g(t)) \end{array} \right.$ est n fois dérivable [resp. de classe $\mathscr{C}^n$] sur I, et on a :

$$\forall t \in I,\ \varphi^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B\big(f^{(k)}(t), g^{(n-k)}(t)\big).$$

Démonstration

Avec les conventions habituelles, la formule de Leibniz peut aussi s'écrire :

$$\varphi^{(n)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{n}{k} B\big(f^{(k)}, g^{(n-k)}\big),$$

en posant $B\big(f^{(k)}, g^{(n-k)}\big)$=0 si $k < 0$ ou $k > n$.

Théorème 6: Formule de Leibniz

Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, et $B: E \times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire continue.

Soient $f : I \longrightarrow E$ et $g : I \longrightarrow F$ deux applications n fois dérivables [resp. de classe $\mathscr{C}^n$] sur I .

Alors l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & G \\ t & \longmapsto & B(f(t), g(t)) \end{array} \right.$ est n fois dérivable [resp. de classe $\mathscr{C}^n$] sur I, et on a :

$$\forall\, t \in I,\ \varphi^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B\big(f^{(k)}(t), g^{(n-k)}(t)\big).$$

Démonstration

Avec les conventions habituelles, la formule de Leibniz peut aussi s'écrire :

$$\varphi^{(n)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{n}{k} B\big(f^{(k)}, g^{(n-k)}\big),$$

en posant $B\big(f^{(k)}, g^{(n-k)}\big)$=0 si $k < 0$ ou $k > n$.

Procédons par récurrence sur n :

- Le résultat est immédiat si $n = 0$, et, si $n = 1$, il s'agit du théorème 3.

Démonstration (suite)

- Supposons le résultat acquis à l'ordre $n-1$, et soient f, g n fois dérivables. Elles sont alors $n-1$ fois dérivables, et l'hypothèse de récurrence donne :
$$\varphi^{(n-1)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \binom{n-1}{k} B\left(f^{(k)}, g^{(n-1-k)}\right).$$

Démonstration (suite)

- Supposons le résultat acquis à l'ordre $n-1$, et soient f, g n fois dérivables. Elles sont alors $n-1$ fois dérivables, et l'hypothèse de récurrence donne :

$$\varphi^{(n-1)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \binom{n-1}{k} B\big(f^{(k)}, g^{(n-1-k)}\big).$$

  Toutes les fonctions qui interviennent dans la somme (de $f^{(0)}$ à $f^{(n-1)}$ et de $g^{(0)}$ à $g^{(n-1)}$) sont dérivables, donc $\varphi^{(n-1)}$ est dérivable (c'est-à-dire que φ est n fois dérivable), et, en utilisant la linéarité de la dérivation ainsi que le théorème 3, on obtient :

$$\varphi^{(n)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \binom{n-1}{k} \Big[B\big(f^{(k+1)}, g^{(n-1-k)}\big) + B\big(f^{(k)}, g^{(n-k)}\big)\Big].$$

Démonstration (suite)

- Supposons le résultat acquis à l'ordre $n-1$, et soient f, g n fois dérivables. Elles sont alors $n-1$ fois dérivables, et l'hypothèse de récurrence donne :

$$\varphi^{(n-1)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \binom{n-1}{k} B\big(f^{(k)}, g^{(n-1-k)}\big).$$

Toutes les fonctions qui interviennent dans la somme (de $f^{(0)}$ à $f^{(n-1)}$ et de $g^{(0)}$ à $g^{(n-1)}$) sont dérivables, donc $\varphi^{(n-1)}$ est dérivable (c'est-à-dire que φ est n fois dérivable), et, en utilisant la linéarité de la dérivation ainsi que le théorème 3, on obtient :

$$\varphi^{(n)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \binom{n-1}{k} \Big[B\big(f^{(k+1)}, g^{(n-1-k)}\big) + B\big(f^{(k)}, g^{(n-k)}\big)\Big].$$

soit :

$$\begin{aligned}
\varphi^{(n)} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \binom{n-1}{k} B\big(f^{(k+1)}, g^{(n-1-k)}\big) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \binom{n-1}{k} B\big(f^{(k)}, g^{(n-k)}\big) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \binom{n-1}{k-1} B\big(f^{(k)}, g^{(n-k)}\big) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \binom{n-1}{k} B\big(f^{(k)}, g^{(n-k)}\big) \quad \text{(chang. d'indice } k = k'-1 \text{ dans la 1ère somme)} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right] B\big(f^{(k)}, g^{(n-k)}\big) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \binom{n}{k} B\big(f^{(k)}, g^{(n-k)}\big) \quad \text{d'après la formule du triangle de Pascal}
\end{aligned}$$

Démonstration (suite)

- Supposons le résultat acquis à l'ordre $n-1$, et soient f, g n fois dérivables. Elles sont alors $n-1$ fois dérivables, et l'hypothèse de récurrence donne :
$$\varphi^{(n-1)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \binom{n-1}{k} B\big(f^{(k)}, g^{(n-1-k)}\big).$$
Toutes les fonctions qui interviennent dans la somme (de $f^{(0)}$ à $f^{(n-1)}$ et de $g^{(0)}$ à $g^{(n-1)}$) sont dérivables, donc $\varphi^{(n-1)}$ est dérivable (c'est-à-dire que φ est n fois dérivable), et, en utilisant la linéarité de la dérivation ainsi que le théorème 3, on obtient :
$$\varphi^{(n)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \binom{n-1}{k} \Big[B\big(f^{(k+1)}, g^{(n-1-k)}\big) + B\big(f^{(k)}, g^{(n-k)}\big)\Big].$$
soit :
$$\begin{aligned}\varphi^{(n)} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \binom{n-1}{k} B\big(f^{(k+1)}, g^{(n-1-k)}\big) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \binom{n-1}{k} B\big(f^{(k)}, g^{(n-k)}\big) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \binom{n-1}{k-1} B\big(f^{(k)}, g^{(n-k)}\big) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \binom{n-1}{k} B\big(f^{(k)}, g^{(n-k)}\big) \quad \text{(chang. d'indice } k = k'-1 \text{ dans la 1ère somme)} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left[\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right] B\big(f^{(k)}, g^{(n-k)}\big) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \binom{n}{k} B\big(f^{(k)}, g^{(n-k)}\big) \quad \text{d'après la formule du triangle de Pascal}\end{aligned}$$
ce qui donne le résultat voulu à l'ordre n.

Corollaire:

$\mathscr{D}^n(I, \mathbb{K})$ et $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{A}(I, \mathbb{K})$, stables pour la multiplication interne.

Corollaire:

$\mathscr{D}^n(I, \mathbb{K})$ et $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{A}(I, \mathbb{K})$, stables pour la multiplication interne.

Corollaire:

Soit $\varphi\colon I \longrightarrow J$ et $f : J \longrightarrow E$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé.

Si $\varphi \in \mathscr{C}^n(I, J)$ et $f \in \mathscr{C}^n(J, E)$, alors $f \circ \varphi \in \mathscr{C}^n(I, E)$

Corollaire:

$\mathscr{D}^n(I, \mathbb{K})$ et $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{A}(I, \mathbb{K})$, stables pour la multiplication interne.

Corollaire:

Soit $\varphi : I \longrightarrow J$ et $f : J \longrightarrow E$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé.

Si $\varphi \in \mathscr{C}^n(I, J)$ et $f \in \mathscr{C}^n(J, E)$, alors $f \circ \varphi \in \mathscr{C}^n(I, E)$

Démonstration

On raisonne par récurrence sur n.

Corollaire:

$\mathscr{D}^n(I, \mathbb{K})$ et $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{A}(I, \mathbb{K})$, stables pour la multiplication interne.

Corollaire:

Soit $\varphi : I \longrightarrow J$ et $f : J \longrightarrow E$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé.

Si $\varphi \in \mathscr{C}^n(I, J)$ et $f \in \mathscr{C}^n(J, E)$, alors $f \circ \varphi \in \mathscr{C}^n(I, E)$

Démonstration

On raisonne par récurrence sur n.

- Pour $n = 0$, le résultat est connu (composée de fonctions continues).

Corollaire:

$\mathscr{D}^n(I,\mathbb{K})$ et $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{A}(I,\mathbb{K})$, stables pour la multiplication interne.

Corollaire:

Soit $\varphi : I \longrightarrow J$ et $f : J \longrightarrow E$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé.

Si $\varphi \in \mathscr{C}^n(I,J)$ et $f \in \mathscr{C}^n(J,E)$, alors $f \circ \varphi \in \mathscr{C}^n(I,E)$

Démonstration

On raisonne par récurrence sur n.

- Pour $n = 0$, le résultat est connu (composée de fonctions continues).
- Supposons le résultat acquis à l'ordre n, et soient f, φ comme dans l'énoncé et de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Alors f et φ sont dérivables, donc, d'après le théorème 5, il en est de même de $f \circ \varphi$, et l'on a $(f \circ \varphi)' = \varphi'.f' \circ \varphi$.

Corollaire:

$\mathscr{D}^n(I, \mathbb{K})$ et $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{A}(I, \mathbb{K})$, stables pour la multiplication interne.

Corollaire:

Soit $\varphi : I \longrightarrow J$ et $f : J \longrightarrow E$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé.

Si $\varphi \in \mathscr{C}^n(I, J)$ et $f \in \mathscr{C}^n(J, E)$, alors $f \circ \varphi \in \mathscr{C}^n(I, E)$

Démonstration

On raisonne par récurrence sur n.

- Pour $n = 0$, le résultat est connu (composée de fonctions continues).
- Supposons le résultat acquis à l'ordre n, et soient f, φ comme dans l'énoncé et de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Alors f et φ sont dérivables, donc, d'après le théorème 5, il en est de même de $f \circ \varphi$, et l'on a $(f \circ \varphi)' = \varphi'.f' \circ \varphi$.
  f' et φ étant de classe $\mathscr{C}^n$, $f' \circ \varphi$ est aussi de classe $\mathscr{C}^n$ d'après l'hypothèse de récurrence.

Corollaire:

$\mathscr{D}^n(I, \mathbb{K})$ et $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{A}(I, \mathbb{K})$, stables pour la multiplication interne.

Corollaire:

Soit $\varphi : I \longrightarrow J$ et $f : J \longrightarrow E$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé.

Si $\varphi \in \mathscr{C}^n(I, J)$ et $f \in \mathscr{C}^n(J, E)$, alors $f \circ \varphi \in \mathscr{C}^n(I, E)$

Démonstration

On raisonne par récurrence sur n.

- Pour $n = 0$, le résultat est connu (composée de fonctions continues).
- Supposons le résultat acquis à l'ordre n, et soient f, φ comme dans l'énoncé et de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Alors f et φ sont dérivables, donc, d'après le théorème 5, il en est de même de $f \circ \varphi$, et l'on a $(f \circ \varphi)' = \varphi'.f' \circ \varphi$.

  f' et φ étant de classe $\mathscr{C}^n$, $f' \circ \varphi$ est aussi de classe $\mathscr{C}^n$ d'après l'hypothèse de récurrence.

  Puis φ' et $f' \circ \varphi$ étant de classe $\mathscr{C}^n$, leur produit externe $\varphi'.f' \circ \varphi$ est aussi de classe $\mathscr{C}^n$ d'après la formule de Leibniz utilisé avec l'application bilinéaire continue $B : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda.x \end{array} \right.$

Corollaire:

$\mathscr{D}^n(I,\mathbb{K})$ et $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{A}(I,\mathbb{K})$, stables pour la multiplication interne.

Corollaire:

Soit $\varphi : I \longrightarrow J$ et $f : J \longrightarrow E$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé.

Si $\varphi \in \mathscr{C}^n(I,J)$ et $f \in \mathscr{C}^n(J,E)$, alors $f \circ \varphi \in \mathscr{C}^n(I,E)$

Démonstration

On raisonne par récurrence sur n.

- Pour $n = 0$, le résultat est connu (composée de fonctions continues).
- Supposons le résultat acquis à l'ordre n, et soient f, φ comme dans l'énoncé et de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Alors f et φ sont dérivables, donc, d'après le théorème 5, il en est de même de $f \circ \varphi$, et l'on a $(f \circ \varphi)' = \varphi'.f' \circ \varphi$.

  f' et φ étant de classe $\mathscr{C}^n$, $f' \circ \varphi$ est aussi de classe $\mathscr{C}^n$ d'après l'hypothèse de récurrence.

  Puis φ' et $f' \circ \varphi$ étant de classe $\mathscr{C}^n$, leur produit externe $\varphi'.f' \circ \varphi$ est aussi de classe $\mathscr{C}^n$ d'après la formule de Leibniz utilisé avec l'application bilinéaire continue $B : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda.x \end{array} \right.$

  (la continuité de B résulte de la caractérisation d'une application multilinéaire continue, compte tenu de la relation $\|B(\lambda,x)\| = |\lambda|\,\|x\|$).

Corollaire:

$\mathscr{D}^n(I,\mathbb{K})$ et $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{A}(I,\mathbb{K})$, stables pour la multiplication interne.

Corollaire:

Soit $\varphi : I \longrightarrow J$ et $f : J \longrightarrow E$, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel normé.

Si $\varphi \in \mathscr{C}^n(I,J)$ et $f \in \mathscr{C}^n(J,E)$, alors $f \circ \varphi \in \mathscr{C}^n(I,E)$

Démonstration

On raisonne par récurrence sur n.

- Pour $n = 0$, le résultat est connu (composée de fonctions continues).
- Supposons le résultat acquis à l'ordre n, et soient f, φ comme dans l'énoncé et de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Alors f et φ sont dérivables, donc, d'après le théorème 5, il en est de même de $f \circ \varphi$, et l'on a $(f \circ \varphi)' = \varphi'.f' \circ \varphi$.

  f' et φ étant de classe $\mathscr{C}^n$, $f' \circ \varphi$ est aussi de classe $\mathscr{C}^n$ d'après l'hypothèse de récurrence.

  Puis φ' et $f' \circ \varphi$ étant de classe $\mathscr{C}^n$, leur produit externe $\varphi'.f' \circ \varphi$ est aussi de classe $\mathscr{C}^n$ d'après la formule de Leibniz utilisé avec l'application bilinéaire continue $B : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda.x \end{array} \right.$

  (la continuité de B résulte de la caractérisation d'une application multilinéaire continue, compte tenu de la relation $\|B(\lambda, x)\| = |\lambda|\,\|x\|$).

  Ainsi $(f \circ \varphi)'$ est de classe $\mathscr{C}^n$, c'est-à-dire $f \circ \varphi$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, ce qui achève la récurrence.

RAPPELS DU COURS DE 1ère ANNÉE

On vient ici d'étudier la dérivabilité d'applications définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, **à valeurs dans un espace vectoriel normé** quelconque.
Dans le cas d'applications définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, **à valeurs dans** $\mathbb{R}$ (une telle application s'appelle une fonction numérique de la variable réelle), il y a des résultats supplémentaires, vus en 1ère année, mais qu'il est important de rappeler.

THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS ET APPLICATIONS

Théorème 7

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I à valeurs réelles, et admettant en un point a **intérieur à I** un extrémum local.

Si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.

Théorème 7

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I à valeurs réelles, et admettant en un point a **intérieur à I** un extrémum local.

Si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.

Démonstration

Supposons que f admette en $a \in \overset{\circ}{I}$ un maximum local : il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in V$, $f(x) \leqslant f(a)$.

Théorème 7

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I à valeurs réelles, et admettant en un point a **intérieur à I** un extrémum local.

Si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.

Démonstration

Supposons que f admette en $a \in \overset{\circ}{I}$ un maximum local : il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in V$, $f(x) \leqslant f(a)$.

Alors, sur V, le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est positif pour $x \leqslant a$ et négatif pour $x \geqslant a$ (a étant intérieur à I, ces deux cas sont possibles).

Théorème 7

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I à valeurs réelles, et admettant en un point a **intérieur à I** un extrémum local.

Si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.

Démonstration

Supposons que f admette en $a \in \overset{\circ}{I}$ un maximum local : il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in V$, $f(x) \leqslant f(a)$.

Alors, sur V, le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est positif pour $x \leqslant a$ et négatif pour $x \geqslant a$ (a étant intérieur à I, ces deux cas sont possibles).
En passant à la limite quand $x \to a$ (à gauche puis à droite), on obtient $f'_g(a) \geqslant 0$ et $f'_d(a) \leqslant 0$.

Théorème 7

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I à valeurs réelles, et admettant en un point a **intérieur à I** un extrémum local.

Si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.

Démonstration

Supposons que f admette en $a \in \overset{\circ}{I}$ un maximum local : il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in V$, $f(x) \leqslant f(a)$.

Alors, sur V, le taux d'accroissement $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ est positif pour $x \leqslant a$ et négatif pour $x \geqslant a$ (a étant intérieur à I, ces deux cas sont possibles).
En passant à la limite quand $x \to a$ (à gauche puis à droite), on obtient $f'_g(a) \geqslant 0$ et $f'_d(a) \leqslant 0$.
f étant dérivable en a, $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$, on en déduit $f'(a) = 0$.

Théorème 7

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I à valeurs réelles, et admettant en un point a **intérieur à I** un extrémum local.

Si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.

Le fait que a est un point intérieur à I est indispensable !!

Par exemple, la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0\,;1] & \longrightarrow & [0\,;1] \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$

admet un minimum en 0 et un maximum en 1, mais sa dérivée ne s'annule jamais !

Théorème 7

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I à valeurs réelles, et admettant en un point a **intérieur à I** un extrémum local.

Si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.

Le fait que a est un point intérieur à I est indispensable !!

Par exemple, la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0\,;1] & \longrightarrow & [0\,;1] \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$

admet un minimum en 0 et un maximum en 1, mais sa dérivée ne s'annule jamais !

Théorème 8: de Rolle

Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a\,;b]$ $(a < b)$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a\,;b[$, **à valeurs réelles**, telle que $f(a) = f(b)$.

Alors, il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 7

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I à valeurs réelles, et admettant en un point a **intérieur à I** un extrémum local.

Si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.

Le fait que a est un point intérieur à I est indispensable !!

Par exemple, la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0\,;1] & \longrightarrow & [0\,;1] \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$

admet un minimum en 0 et un maximum en 1, mais sa dérivée ne s'annule jamais !

Théorème 8: de Rolle

Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a\,;b]$ ($a < b$), dérivable sur l'intervalle ouvert $]a\,;b[$, **à valeurs réelles**, telle que $f(a) = f(b)$.

Alors, il existe $c \in \,]a\,;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration

f, continue sur le segment $[a\,;b]$, est bornée et atteint ses bornes. Notons m son minimum et M son maximum.

Théorème 7

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I à valeurs réelles, et admettant en un point a **intérieur à I** un extrémum local.

Si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.

Le fait que a est un point intérieur à I est indispensable !!

Par exemple, la fonction $f : \begin{cases} [0\,;1] & \longrightarrow & [0\,;1] \\ x & \longmapsto & x \end{cases}$

admet un minimum en 0 et un maximum en 1, mais sa dérivée ne s'annule jamais !

Théorème 8: de Rolle

Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a\,;b]$ $(a < b)$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a\,;b[$, **à valeurs réelles**, telle que $f(a) = f(b)$.

Alors, il existe $c \in\,]a\,;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration

f, continue sur le segment $[a\,;b]$, est bornée et atteint ses bornes. Notons m son minimum et M son maximum.

- Si $m = M$, alors f est constante sur $[a\,;b]$ donc $f'(t) = 0$ pour tout $t \in\,]a\,;b[$.

Théorème 7

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I à valeurs réelles, et admettant en un point a **intérieur à I** un extrémum local.

Si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.

Le fait que a est un point intérieur à I est indispensable !!

Par exemple, la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0\,;1] & \longrightarrow & [0\,;1] \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$

admet un minimum en 0 et un maximum en 1, mais sa dérivée ne s'annule jamais !

Théorème 8: de Rolle

Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a\,;b]$ $(a < b)$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a\,;b[$, **à valeurs réelles**, telle que $f(a) = f(b)$.

Alors, il existe $c \in \,]a\,;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration

f, continue sur le segment $[a\,;b]$, est bornée et atteint ses bornes. Notons m son minimum et M son maximum.

- Si $m = M$, alors f est constante sur $[a\,;b]$ donc $f'(t) = 0$ pour tout $t \in \,]a\,;b[$.
- Sinon, l'un de ces extrema, par exemple M, est forcément distinct de $f(a) = f(b)$. Il est donc atteint en un point c de $]a\,;b[$, et l'on a $f'(c) = 0$ d'après le théorème précédent.

Théorème 9: des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a\,;b]$ $(a < b)$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a\,;b[$, **à valeurs réelles** .
Alors, il existe c appartenant à $]a\,;b[$ tel que : $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Théorème 9: des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a\,;b]$ ($a < b$) et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a\,;b[$, **à valeurs réelles** .
Alors, il existe c appartenant à $]a\,;b[$ tel que : $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

Démonstration

Soit φ définie sur $[a\,;b]$ par $\varphi(t) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a) + f(a)$

Théorème 9: des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a\,;b]$ $(a<b)$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a\,;b[$, **à valeurs réelles** .
Alors, il existe c appartenant à $]a\,;b[$ tel que : $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.

Démonstration

Soit φ définie sur $[a\,;b]$ par $\varphi(t)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a)+f(a)$
(φ est l'équation de la droite passant par les points A de coordonnées $\big(a,f(a)\big)$ et B de coordonnées $\big(b,f(b)\big)$),

Théorème 9: des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a\,;b]$ ($a < b$) et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a\,;b[$, **à valeurs réelles** .
Alors, il existe c appartenant à $]a\,;b[$ tel que : $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

Démonstration

Soit φ définie sur $[a\,;b]$ par $\varphi(t) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a) + f(a)$
(φ est l'équation de la droite passant par les points A de coordonnées $\big(a, f(a)\big)$ et B de coordonnées $\big(b, f(b)\big)$), et soit g définie par $g(t) = f(t) - \varphi(t)$.

Théorème 9: des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a\,;b]$ ($a < b$) et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a\,;b[$, **à valeurs réelles** .
Alors, il existe c appartenant à $]a\,;b[$ tel que : $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

Démonstration

Soit φ définie sur $[a\,;b]$ par $\varphi(t) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a) + f(a)$
(φ est l'équation de la droite passant par les points A de coordonnées $\big(a, f(a)\big)$ et B de coordonnées $\big(b, f(b)\big)$), et soit g définie par $g(t) = f(t) - \varphi(t)$.

Alors g vérifie les hypothèses du théorème de Rolle ;

Théorème 9: des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a\,;b]$ ($a < b$) et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a\,;b[$, **à valeurs réelles** .
Alors, il existe c appartenant à $]a\,;b[$ tel que : $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

Démonstration

Soit φ définie sur $[a\,;b]$ par $\varphi(t) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a) + f(a)$
(φ est l'équation de la droite passant par les points A de coordonnées $\big(a, f(a)\big)$ et B de coordonnées $\big(b, f(b)\big)$), et soit g définie par $g(t) = f(t) - \varphi(t)$.
Alors g vérifie les hypothèses du théorème de Rolle ; il existe donc $c \in \,]a\,;b[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui donne $f'(c) = \varphi'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Théorème 9: des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a\,;b]$ ($a < b$) et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a\,;b[$, **à valeurs réelles** .
Alors, il existe c appartenant à $]a\,;b[$ tel que : $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

Démonstration

Soit φ définie sur $[a\,;b]$ par $\varphi(t) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a) + f(a)$
(φ est l'équation de la droite passant par les points A de coordonnées $\big(a, f(a)\big)$ et B de coordonnées $\big(b, f(b)\big)$), et soit g définie par $g(t) = f(t) - \varphi(t)$.
Alors g vérifie les hypothèses du théorème de Rolle ; il existe donc $c \in\,]a\,;b[$ tel que $g'(c) = 0$, ce qui donne $f'(c) = \varphi'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

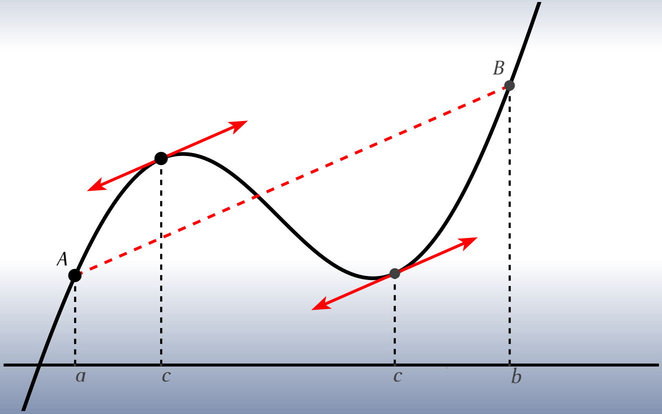
Le théorème des accroissements finis ne se généralise pas aux fonctions à valeurs dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $\geqslant 2$!

Par exemple, l'application $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{it} \end{array}$ vérifie $f(0) = f(2\pi)$, mais il n'existe pas de c tel que $f'(c) = 0$.

Interprétation géométrique :

Le théorème des accroissements finis peut se traduire géométriquement par :

> si f est une fonction numérique continue sur $[a\,;b]$ et dérivable sur $]a\,;b[$, il existe (au moins) un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la corde qui joint les points A de coordonnées $(a, f(a))$ et B de coordonnées $(b, f(b))$.



Théorème 10: Prolongement de la dérivée

Soit f une fonction numérique continue sur l'intervalle fermé $[a\,;b]$ $(a < b)$, dérivable sur l'intervalle $]a\,;b]$, à valeurs réelles.

On suppose que $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = \ell$ existe.

Alors f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = \ell$.

Rem : on a bien sûr un résultat similaire pour la dérivée à gauche.

Théorème 10: Prolongement de la dérivée

Soit f une fonction numérique continue sur l'intervalle fermé $[a\,;b]$ ($a < b$), dérivable sur l'intervalle $]a\,;b]$, à valeurs réelles.

On suppose que $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = \ell$ existe.

Alors f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = \ell$.

Rem : on a bien sûr un résultat similaire pour la dérivée à gauche.

Démonstration

Pour $x \in\,]a\,;b]$ on a $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$ avec $c_x \in\,]a\,;x[$, d'après le théorème des accroissements finis.

Théorème 10: Prolongement de la dérivée

Soit f une fonction numérique continue sur l'intervalle fermé $[a\,;b]$ ($a<b$), dérivable sur l'intervalle $]a\,;b]$, à valeurs réelles.

On suppose que $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=\ell$ existe.

Alors f est dérivable à droite en a et $f'_d(a)=\ell$.

Rem : on a bien sûr un résultat similaire pour la dérivée à gauche.

Démonstration

Pour $x\in\,]a\,;b]$ on a $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c_x)$ avec $c_x\in\,]a\,;x[$, d'après le théorème des accroissements finis.

Quand $x\to a$, on a aussi $c_x\to a$ donc $\lim\limits_{x\to a^+} f'(c_x)=\ell$ d'où $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell$, ce qui est le résultat annoncé.

Théorème 10: Prolongement de la dérivée

Soit f une fonction numérique continue sur l'intervalle fermé $[a\,;b]$ ($a<b$), dérivable sur l'intervalle $]a\,;b]$, à valeurs réelles.

On suppose que $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=\ell$ existe.

Alors f est dérivable à droite en a et $f'_d(a)=\ell$.

Rem : on a bien sûr un résultat similaire pour la dérivée à gauche.

Démonstration

Pour $x\in\,]a\,;b]$ on a $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c_x)$ avec $c_x\in\,]a\,;x[$, d'après le théorème des accroissements finis.

Quand $x\to a$, on a aussi $c_x\to a$ donc $\lim\limits_{x\to a^+} f'(c_x)=\ell$ d'où $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell$, ce qui est le résultat annoncé.

Remarques :

1. Avec les mêmes notations, si l'on a $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=\pm\infty$, la même démonstration permet de conclure que : $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\pm\infty$, donc dans ce cas f n'est pas dérivable à droite en a et sa courbe représentative y admet une tangente parallèle à Oy.

Théorème 10: Prolongement de la dérivée

Soit f une fonction numérique continue sur l'intervalle fermé $[a\,;b]$ ($a < b$), dérivable sur l'intervalle $]a\,;b]$, à valeurs réelles.

On suppose que $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = \ell$ existe.

Alors f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = \ell$.

Rem : on a bien sûr un résultat similaire pour la dérivée à gauche.

Démonstration

Pour $x \in \,]a\,;b]$ on a $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$ avec $c_x \in \,]a\,;x[$, d'après le théorème des accroissements finis.

Quand $x \to a$, on a aussi $c_x \to a$ donc $\lim\limits_{x \to a^+} f'(c_x) = \ell$ d'où $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$, ce qui est le résultat annoncé.

Remarques :

1. Avec les mêmes notations, si l'on a $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = \pm\infty$, la même démonstration permet de conclure que : $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$, donc dans ce cas f n'est pas dérivable à droite en a et sa courbe représentative y admet une tangente parallèle à Oy.
2. Si l'on suppose de plus f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a\,;b]$, ce théorème montre en plus que f' est continue en a^+ (puisque $f'_d(a) = \lim\limits_{x \to a^+} f'(x)$), donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,;b]$.

   Le théorème s'appelle alors **théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.**

Exercices d'application

- Montrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x} & \text{si } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Exercices d'application

- Montrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x} & \text{si } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Solution

f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$ par les théorèmes opératoires usuels (ici quotient et somme).

Exercices d'application

- Montrer que la fonction $f\colon x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x} & \text{si } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Solution

f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$ par les théorèmes opératoires usuels (ici quotient et somme).

f est continue en 0 puisque :

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^2} = 0 = f(0).$$

Exercices d'application

- Montrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x} & \text{si } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Solution

f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$ par les théorèmes opératoires usuels (ici quotient et somme).

f est continue en 0 puisque :

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^2} = 0 = f(0).$$

Pour $x \neq 0$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\cos x}{\sin^2 x} = \dfrac{x^2 \cos x - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$ donc

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2}{x^4} = -\frac{1}{6}.$$

Exercices d'application

- Montrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x} & \text{si } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Solution

f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$ par les théorèmes opératoires usuels (ici quotient et somme).

f est continue en 0 puisque :

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^2} = 0 = f(0).$$

Pour $x \neq 0$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\cos x}{\sin^2 x} = \dfrac{x^2 \cos x - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$ donc

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2}{x^4} = -\frac{1}{6}.$$

D'après le théorème précédent, f est dérivable en 0 et $f'(0) = \lim_{x \to 0} f'(x) = -\dfrac{1}{6}$, ce qui prouve en même temps que f' est continue en 0.

Exercices d'application

- Montrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x} & \text{si } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Solution

f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$ par les théorèmes opératoires usuels (ici quotient et somme).

f est continue en 0 puisque :

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^2} = 0 = f(0).$$

Pour $x \neq 0$, $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{\cos x}{\sin^2 x} = \dfrac{x^2 \cos x - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x}$ donc

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2}{x^4} = -\frac{1}{6}.$$

D'après le théorème précédent, f est dérivable en 0 et $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} f'(x) = -\dfrac{1}{6}$, ce qui prouve en même temps que f' est continue en 0. Donc f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Exercices d'application

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x} & \text{si } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

2. Soit $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$ Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer ses dérivées successives en 0.

Exercices d'application

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x} & \text{si } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

2. Soit $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$ Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer ses dérivées successives en 0.

Solution

Déjà, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ par les théorèmes opératoires usuels (ici, quotient + composée).

Exercices d'application

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x} & \text{si } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

2. Soit $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0\,. \end{cases}$ Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer ses dérivées successives en 0.

Solution

Déjà, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ par les théorèmes opératoires usuels (ici, quotient + composée).

En utilisant le théorème précédent, on montre ensuite par récurrence sur n la propriété :

$(\mathcal{P}_n)$: f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$, $f^{(n)}(0) = 0$ et $\forall\, x \neq 0,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$,
où P_n est un polynôme de degré $3n$.

Théorème 11: variations d'une fonction

Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$, et dérivable en tout point de $\overset{\circ}{I}$.
Pour que f soit croissante [resp. décroissante] sur I, il faut et il suffit que sa dérivée soit positive [resp. négative] sur $\overset{\circ}{I}$; et, pour que f soit constante, il faut et il suffit que sa dérivée soit nulle sur $\overset{\circ}{I}$.

Théorème 11: variations d'une fonction

Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$, et dérivable en tout point de $\overset{\circ}{I}$.
Pour que f soit croissante [resp. décroissante] sur I, il faut et il suffit que sa dérivée soit positive [resp. négative] sur $\overset{\circ}{I}$; et, pour que f soit constante, il faut et il suffit que sa dérivée soit nulle sur $\overset{\circ}{I}$.

Démonstration

- Supposons f croissante, et soit $a \in \overset{\circ}{I}$. Pour tout $x \neq a$, le rapport $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est positif donc, en faisant $x \to a$, on obtient $f'(a) \geqslant 0$ d'après le principe de prolongement des inégalités.

Théorème 11: variations d'une fonction

Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$, et dérivable en tout point de $\overset{\circ}{I}$.
Pour que f soit croissante [resp. décroissante] sur I, il faut et il suffit que sa dérivée soit positive [resp. négative] sur $\overset{\circ}{I}$; et, pour que f soit constante, il faut et il suffit que sa dérivée soit nulle sur $\overset{\circ}{I}$.

Démonstration

- Supposons f croissante, et soit $a \in \overset{\circ}{I}$. Pour tout $x \neq a$, le rapport $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est positif donc, en faisant $x \to a$, on obtient $f'(a) \geqslant 0$ d'après le principe de prolongement des inégalités.
- Supposons maintenant $f' \geqslant 0$ sur $\overset{\circ}{I}$. Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a\,;b[$ (donc $c \in \overset{\circ}{I}$) tel que $f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$; puisque $f'(c) \geqslant 0$, on en déduit $f(b) \geqslant f(a)$, donc f est croissante sur I.

Théorème 11: variations d'une fonction

Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$, et dérivable en tout point de $\overset{\circ}{I}$.
Pour que f soit croissante [resp. décroissante] sur I, il faut et il suffit que sa dérivée soit positive [resp. négative] sur $\overset{\circ}{I}$; et, pour que f soit constante, il faut et il suffit que sa dérivée soit nulle sur $\overset{\circ}{I}$.

Si, dans la démonstration qui précède, on suppose $f'(t) > 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, on obtient $f(b) > f(a)$; on peut donc énoncer :

Théorème 11: variations d'une fonction

Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$, et dérivable en tout point de $\overset{\circ}{I}$.
Pour que f soit croissante [resp. décroissante] sur I, il faut et il suffit que sa dérivée soit positive [resp. négative] sur $\overset{\circ}{I}$; et, pour que f soit constante, il faut et il suffit que sa dérivée soit nulle sur $\overset{\circ}{I}$.

Si, dans la démonstration qui précède, on suppose $f'(t) > 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, on obtient $f(b) > f(a)$; on peut donc énoncer :

Proposition 7

Soit f une fonction à valeurs réelles **continue** sur un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$, et dérivable en tout point de $\overset{\circ}{I}$.
Pour que f soit strictement croissante [respectivement strictement décroissante] sur I, il **suffit** que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \overset{\circ}{I}$ [respectivement $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \overset{\circ}{I}$].

Théorème 11: variations d'une fonction

Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$, et dérivable en tout point de $\mathring{I}$.
Pour que f soit croissante [resp. décroissante] sur I, il faut et il suffit que sa dérivée soit positive [resp. négative] sur $\mathring{I}$; et, pour que f soit constante, il faut et il suffit que sa dérivée soit nulle sur $\mathring{I}$.

Si, dans la démonstration qui précède, on suppose $f'(t) > 0$ sur $\mathring{I}$, on obtient $f(b) > f(a)$; on peut donc énoncer :

Proposition 7

Soit f une fonction à valeurs réelles **continue** sur un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$, et dérivable en tout point de $\mathring{I}$.
Pour que f soit strictement croissante [respectivement strictement décroissante] sur I, il **suffit** que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathring{I}$ [respectivement $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathring{I}$].

On notera que cette condition suffisante n'est pas nécessaire !

Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est strictement croissante, bien que sa dérivée s'annule !

Théorème 11: variations d'une fonction

Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$, et dérivable en tout point de $\mathring{I}$.
Pour que f soit croissante [resp. décroissante] sur I, il faut et il suffit que sa dérivée soit positive [resp. négative] sur $\mathring{I}$; et, pour que f soit constante, il faut et il suffit que sa dérivée soit nulle sur $\mathring{I}$.

Si, dans la démonstration qui précède, on suppose $f'(t) > 0$ sur $\mathring{I}$, on obtient $f(b) > f(a)$; on peut donc énoncer :

Proposition 7

Soit f une fonction à valeurs réelles **continue** sur un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$, et dérivable en tout point de $\mathring{I}$.
Pour que f soit strictement croissante [respectivement strictement décroissante] sur I, il **suffit** que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathring{I}$ [respectivement $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathring{I}$].

On notera que cette condition suffisante n'est pas nécessaire !

Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est strictement croissante, bien que sa dérivée s'annule !

On a cependant le résultat suivant :

Théorème 12

Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$, et dérivable en tout point de $\mathring{I}$.

Pour que f soit strictement croissante [respectivement strictement décroissante] sur I, il faut et il suffit que sa dérivée soit positive [respectivement négative] sur $\mathring{I}$ et que l'ensemble $Z = \left\{ x \in \mathring{I} \;\middle|\; f'(x) = 0 \right\}$ des zéros de f' soit d'intérieur vide.

Théorème 12

Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$, et dérivable en tout point de $\overset{\circ}{I}$.

Pour que f soit strictement croissante [respectivement strictement décroissante] sur I, il faut et il suffit que sa dérivée soit positive [respectivement négative] sur $\overset{\circ}{I}$ et que l'ensemble $Z = \left\{ x \in \overset{\circ}{I} \;\middle|\; f'(x) = 0 \right\}$ des zéros de f' soit d'intérieur vide.

Démonstration

- Supposons f strictement croissante. f étant croissante, on a déjà $f' \geqslant 0$ sur $\overset{\circ}{I}$.

Théorème 12

Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$, et dérivable en tout point de $\overset{\circ}{I}$.

Pour que f soit strictement croissante [respectivement strictement décroissante] sur I, il faut et il suffit que sa dérivée soit positive [respectivement négative] sur $\overset{\circ}{I}$ et que l'ensemble $Z = \left\{ x \in \overset{\circ}{I} \,\middle|\, f'(x) = 0 \right\}$ des zéros de f' soit d'intérieur vide.

Démonstration

- Supposons f strictement croissante. f étant croissante, on a déjà $f' \geqslant 0$ sur $\overset{\circ}{I}$.
  Et si par l'absurde Z était d'intérieur non vide, il existerait un intervalle ouvert J inclus dans Z. Sur cet intervalle, on a $f' = 0$, donc $f = cste$, ce qui contredit la stricte monotonie de f.

Théorème 12

Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$, et dérivable en tout point de $\overset{\circ}{I}$.

Pour que f soit strictement croissante [respectivement strictement décroissante] sur I, il faut et il suffit que sa dérivée soit positive [respectivement négative] sur $\overset{\circ}{I}$ et que l'ensemble $Z = \left\{ x \in \overset{\circ}{I} \;\middle|\; f'(x) = 0 \right\}$ des zéros de f' soit d'intérieur vide.

Démonstration

- Supposons f strictement croissante. f étant croissante, on a déjà $f' \geqslant 0$ sur $\overset{\circ}{I}$.
  Et si par l'absurde Z était d'intérieur non vide, il existerait un intervalle ouvert J inclus dans Z. Sur cet intervalle, on a $f' = 0$, donc $f = cste$, ce qui contredit la stricte monotonie de f.

- Réciproquement, supposons $f' \geqslant 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, et $\overset{\circ}{Z} = \emptyset$. Alors f est croissante sur I d'après le théorème précédent.

Théorème 12

Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$, et dérivable en tout point de $\overset{\circ}{I}$.
Pour que f soit strictement croissante [respectivement strictement décroissante] sur I, il faut et il suffit que sa dérivée soit positive [respectivement négative] sur $\overset{\circ}{I}$ et que l'ensemble $Z = \left\{ x \in \overset{\circ}{I} \;\middle|\; f'(x) = 0 \right\}$ des zéros de f' soit d'intérieur vide.

Démonstration

- Supposons f strictement croissante. f étant croissante, on a déjà $f' \geqslant 0$ sur $\overset{\circ}{I}$.
  Et si par l'absurde Z était d'intérieur non vide, il existerait un intervalle ouvert J inclus dans Z. Sur cet intervalle, on a $f' = 0$, donc $f = cste$, ce qui contredit la stricte monotonie de f.
- Réciproquement, supposons $f' \geqslant 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, et $\overset{\circ}{Z} = \emptyset$. Alors f est croissante sur I d'après le théorème précédent.
  Et si f n'était pas strictement croissante, il existerait $a < b$ dans I tels que $f(a) = f(b)$. On aurait alors $f = cste$ sur $[a\,;b]$, donc $]a\,;b[\subset Z$, contradiction.

Théorème 12

Soit f une fonction à valeurs réelles continue sur un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$, et dérivable en tout point de $\overset{\circ}{I}$.

Pour que f soit strictement croissante [respectivement strictement décroissante] sur I, il faut et il suffit que sa dérivée soit positive [respectivement négative] sur $\overset{\circ}{I}$ et que l'ensemble $Z = \left\{ x \in \overset{\circ}{I} \;\middle|\; f'(x) = 0 \right\}$ des zéros de f' soit d'intérieur vide.

Démonstration

- Supposons f strictement croissante. f étant croissante, on a déjà $f' \geqslant 0$ sur $\overset{\circ}{I}$.
  Et si par l'absurde Z était d'intérieur non vide, il existerait un intervalle ouvert J inclus dans Z. Sur cet intervalle, on a $f' = 0$, donc $f = cste$, ce qui contredit la stricte monotonie de f.
- Réciproquement, supposons $f' \geqslant 0$ sur $\overset{\circ}{I}$, et $\overset{\circ}{Z} = \emptyset$. Alors f est croissante sur I d'après le théorème précédent.
  Et si f n'était pas strictement croissante, il existerait $a < b$ dans I tels que $f(a) = f(b)$. On aurait alors $f = cste$ sur $[a\,;b]$, donc $]a\,;b[\subset Z$, contradiction.

Exemple

La fonction $x \mapsto x + \sin x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Proposition 8: Dérivée de la fonction réciproque

Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection continue de I sur J.
Si f est dérivable en $x_0 \in I$ et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}\,.$$

Proposition 8: Dérivée de la fonction réciproque

Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection continue de I sur J.
Si f est dérivable en $x_0 \in I$ et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}.$$

Démonstration

Pour $y \neq y_0$ on a, en posant $x = f^{-1}(y)$:

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)},$$

Proposition 8: Dérivée de la fonction réciproque

Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection continue de I sur J.
Si f est dérivable en $x_0 \in I$ et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}.$$

Démonstration

Pour $y \neq y_0$ on a, en posant $x = f^{-1}(y)$:

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)},$$

(puisque f est injective, la fonction $x \mapsto \dfrac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$ est bien définie pour $x \neq x_0$).

Proposition 8: Dérivée de la fonction réciproque

Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection continue de I sur J.
Si f est dérivable en $x_0 \in I$ et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)} .$$

Démonstration

Pour $y \neq y_0$ on a, en posant $x = f^{-1}(y)$:

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} ,$$

(puisque f est injective, la fonction $x \mapsto \dfrac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$ est bien définie pour $x \neq x_0$).

Puisque $f'(x_0) \neq 0$ on a $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \dfrac{1}{f'(x_0)}$. De plus, f^{-1} est continue donc quand $y \to y_0$ on a $x \to x_0$ et ainsi

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)} .$$

Proposition 8: Dérivée de la fonction réciproque

Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection continue de I sur J.
Si f est dérivable en $x_0 \in I$ et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et on a :

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}\,.$$

Théorème 13

Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Soit f une application de classe $\mathscr{C}^k$ d'un intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$, telle que f' **ne s'annule pas sur** I.

Alors f est bijective de I sur J et f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J.

Proposition 8: Dérivée de la fonction réciproque

Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection continue de I sur J.
Si f est dérivable en $x_0 \in I$ et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}\,.$$

Théorème 13

Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Soit f une application de classe $\mathscr{C}^k$ d'un intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$, telle que **f' ne s'annule pas sur I**.

Alors f est bijective de I sur J et f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J.

Démonstration

Supposons f de classe $\mathscr{C}^k$ ($k \geqslant 1$) de I sur J, telle que f' ne s'annule pas.

Proposition 8: Dérivée de la fonction réciproque

Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection continue de I sur J.
Si f est dérivable en $x_0 \in I$ et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}.$$

Théorème 13

Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Soit f une application de classe $\mathscr{C}^k$ d'un intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$, telle que **f' ne s'annule pas sur I**.

Alors f est bijective de I sur J et f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J.

Démonstration

Supposons f de classe $\mathscr{C}^k$ ($k \geqslant 1$) de I sur J, telle que f' ne s'annule pas. Comme f' est continue, le théorème des valeurs intermédiaires implique que f' garde un signe constant sur I, donc f est strictement monotone.

Proposition 8: Dérivée de la fonction réciproque

Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection continue de I sur J.
Si f est dérivable en $x_0 \in I$ et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et on a :

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}.$$

Théorème 13

Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Soit f une application de classe $\mathscr{C}^k$ d'un intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$, telle que **f' ne s'annule pas sur I**.

Alors f est bijective de I sur J et f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J.

Démonstration

Supposons f de classe $\mathscr{C}^k$ ($k \geqslant 1$) de I sur J, telle que f' ne s'annule pas. Comme f' est continue, le théorème des valeurs intermédiaires implique que f' garde un signe constant sur I, donc f est strictement monotone. Elle est donc injective, donc bijective de I sur $f(I) = J$.

Proposition 8: Dérivée de la fonction réciproque

Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection continue de I sur J.
Si f est dérivable en $x_0 \in I$ et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}\,.$$

Théorème 13

Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Soit f une application de classe $\mathscr{C}^k$ d'un intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$, telle que **f' ne s'annule pas sur I**.

Alors f est bijective de I sur J et f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J.

Démonstration

Supposons f de classe $\mathscr{C}^k$ ($k \geqslant 1$) de I sur J, telle que f' ne s'annule pas. Comme f' est continue, le théorème des valeurs intermédiaires implique que f' garde un signe constant sur I, donc f est strictement monotone. Elle est donc injective, donc bijective de I sur $f(I) = J$.

La proposition précédente montre alors que f^{-1} est dérivable sur J, de dérivée $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Proposition 8: Dérivée de la fonction réciproque

Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection continue de I sur J.
Si f est dérivable en $x_0 \in I$ et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)} \cdot$$

Théorème 13

Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Soit f une application de classe $\mathscr{C}^k$ d'un intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$, telle que **f' ne s'annule pas sur I**.

Alors f est bijective de I sur J et f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J.

Démonstration

Supposons f de classe $\mathscr{C}^k$ ($k \geqslant 1$) de I sur J, telle que f' ne s'annule pas. Comme f' est continue, le théorème des valeurs intermédiaires implique que f' garde un signe constant sur I, donc f est strictement monotone. Elle est donc injective, donc bijective de I sur $f(I) = J$.

La proposition précédente montre alors que f^{-1} est dérivable sur J, de dérivée $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

f' et f^{-1} étant continues, on en déduit que $(f^{-1})'$ est continue, donc que f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$,

Proposition 8: Dérivée de la fonction réciproque

Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection continue de I sur J.
Si f est dérivable en $x_0 \in I$ et si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et on a :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}\,.$$

Théorème 13

Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Soit f une application de classe $\mathscr{C}^k$ d'un intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$, telle que **f' ne s'annule pas sur I**.

Alors f est bijective de I sur J et f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^k$ sur J.

Démonstration

Supposons f de classe $\mathscr{C}^k$ ($k \geqslant 1$) de I sur J, telle que f' ne s'annule pas. Comme f' est continue, le théorème des valeurs intermédiaires implique que f' garde un signe constant sur I, donc f est strictement monotone. Elle est donc injective, donc bijective de I sur $f(I) = J$.

La proposition précédente montre alors que f^{-1} est dérivable sur J, de dérivée $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

f' et f^{-1} étant continues, on en déduit que $(f^{-1})'$ est continue, donc que f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^1$, puis (si $k \geqslant 2$), f' de classe $\mathscr{C}^1$ et f^{-1} de classe $\mathscr{C}^1$ impliquent $f' \circ f^{-1}$ de classe $\mathscr{C}^1$ donc $(f^{-1})'$ de classe $\mathscr{C}^1$ donc f^{-1} de classe $\mathscr{C}^2$ etc... (*récurrence à rédiger*)

Théorème 14: Formule de Taylor-Young

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, de classe $\mathscr{C}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) sur I. Alors, pour tous $a, x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o\left((x-a)^n\right).$$

Théorème 14: Formule de Taylor-Young

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, de classe $\mathscr{C}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) sur I. Alors, pour tous $a, x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o\left((x-a)^n\right).$$

La formule de Taylor-Young donne donc l'existence d'un développement limité d'ordre n en a lorsque f est de classe $\mathscr{C}^n$.

Les développements limités des fonctions usuelles sont rappelés en Annexe, ils doivent être parfaitement sus.

Théorème 14: Formule de Taylor-Young

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, de classe $\mathscr{C}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) sur I. Alors, pour tous $a, x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o\left((x-a)^n\right).$$

La formule de Taylor-Young donne donc l'existence d'un développement limité d'ordre n en a lorsque f est de classe $\mathscr{C}^n$.

Les développements limités des fonctions usuelles sont rappelés en Annexe, ils doivent être parfaitement sus.

Une fonction peut admettre un développement limité d'ordre n en un point a sans y être n fois dérivable (pour $n \geqslant 2$ bien sûr).

Théorème 14: Formule de Taylor-Young

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, de classe $\mathscr{C}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) sur I. Alors, pour tous $a, x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o\left((x-a)^n\right).$$

La formule de Taylor-Young donne donc l'existence d'un développement limité d'ordre n en a lorsque f est de classe $\mathscr{C}^n$.

Les développements limités des fonctions usuelles sont rappelés en Annexe, ils doivent être parfaitement sus.

Une fonction peut admettre un développement limité d'ordre n en un point a sans y être n fois dérivable (pour $n \geqslant 2$ bien sûr).

Exemple

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$.

Alors f admet en 0 le développement limité d'ordre 2 : $f(x) = o(x^2)$.

Cependant, pour $x \neq 0$, $f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ et $f'(0) = 0$ (par le théorème de prolongement de la dérivée), donc le rapport $\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}$ n'a pas de limite quand x tend vers 0, c'est-à-dire que f n'est pas deux fois dérivable en 0.

Théorème 15: Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{K}$, de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) sur $[a\,;b]$. Alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \left\| f^{(n+1)} \right\|_{\infty}.$$

(où $\left\| f^{(n+1)} \right\|_{\infty} = \sup \left\{ \left| f^{(n+1)}(x) \right| ,\ x \in [a\,;b] \right\}$).

Théorème 15: Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{K}$, de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) sur $[a\,;b]$. Alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \left\| f^{(n+1)} \right\|_{\infty}.$$

(où $\left\| f^{(n+1)} \right\|_{\infty} = \sup \left\{ \left| f^{(n+1)}(x) \right| \,,\; x \in [a\,;b] \right\}$).

Démonstration

Posons, pour tout $x \in [a\,;b]$: $\varphi(x) = f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - A\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ où le réel A est choisi de façon que $\varphi(a) = \varphi(b) (= 0)$ (cela est possible car $b - a \neq 0$).

Théorème 15: Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{K}$, de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) sur $[a\,;b]$. Alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty .$$

(où $\left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty = \sup \left\{ \left| f^{(n+1)}(x) \right| \,,\ x \in [a\,;b] \right\}$).

Démonstration

Posons, pour tout $x \in [a\,;b]$: $\varphi(x) = f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - A\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ où le réel A est choisi de façon que $\varphi(a) = \varphi(b)(= 0)$ (cela est possible car $b - a \neq 0$).
Compte tenu des hypothèses, φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,;b]$, et un calcul facile donne

$$\varphi'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!} \left(A - f^{(n+1)}(x) \right).$$

Théorème 15: Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{K}$, de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) sur $[a\,;b]$. Alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty .$$

(où $\left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty = \sup \left\{ \left| f^{(n+1)}(x) \right| \,,\ x \in [a\,;b] \right\}$).

Démonstration

Posons, pour tout $x \in [a\,;b]$: $\varphi(x) = f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - A\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ où le réel A est choisi de façon que $\varphi(a) = \varphi(b) (= 0)$ (cela est possible car $b - a \neq 0$).
Compte tenu des hypothèses, φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,;b]$, et un calcul facile donne

$$\varphi'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!} \left(A - f^{(n+1)}(x) \right).$$

Puisque $\varphi(a) = \varphi(b)$, il existe $c \in \left]a\,;b\right[$ tel que $\varphi'(c) = 0$ donc $A = f^{(n+1)}(c)$.

Théorème 15: Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{K}$, de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) sur $[a\,;b]$. Alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty .$$

(où $\left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty = \sup \left\{ \left| f^{(n+1)}(x) \right| \,,\ x \in [a\,;b] \right\}$).

Démonstration

Posons, pour tout $x \in [a\,;b]$: $\varphi(x) = f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - A\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ où le réel A est choisi de façon que $\varphi(a) = \varphi(b) (= 0)$ (cela est possible car $b - a \neq 0$).
Compte tenu des hypothèses, φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,;b]$, et un calcul facile donne

$$\varphi'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!} \left(A - f^{(n+1)}(x) \right).$$

Puisque $\varphi(a) = \varphi(b)$, il existe $c \in]a\,;b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$ donc $A = f^{(n+1)}(c)$. En écrivant $\varphi(a) = 0$, on obtient alors

$$f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = f^{(n+1)}(c) \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Théorème 15: Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{K}$, de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) sur $[a\,;b]$. Alors :

$$\left|f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)\right| \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty .$$

(où $\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty = \sup\left\{\left|f^{(n+1)}(x)\right| \,,\ x \in [a\,;b]\right\}$).

Démonstration

Posons, pour tout $x \in [a\,;b]$: $\varphi(x) = f(b) - f(x) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - A\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ où le réel A est choisi de façon que $\varphi(a) = \varphi(b)(=0)$ (cela est possible car $b - a \neq 0$).
Compte tenu des hypothèses, φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,;b]$, et un calcul facile donne

$$\varphi'(x) = \frac{(b-x)^n}{n!}\left(A - f^{(n+1)}(x)\right).$$

Puisque $\varphi(a) = \varphi(b)$, il existe $c \in \,]a\,;b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$ donc $A = f^{(n+1)}(c)$. En écrivant $\varphi(a) = 0$, on obtient alors

$$f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

et l'inégalité cherchée s'en déduit puisque $\left|f^{(n+1)}(c)\right| \leqslant \left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty$.

Théorème 15: Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f\colon [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{K}$, de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) sur $[a\,;b]$. Alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty .$$

(où $\left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty = \sup \left\{ \left| f^{(n+1)}(x) \right| \,,\; x \in [a\,;b] \right\}$).

Corollaire:

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) sur I. Alors, pour tous $a, x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + O\left((x-a)^{n+1}\right).$$

Théorème 15: Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f\colon [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{K}$, de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) sur $[a\,;b]$. Alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \left\| f^{(n+1)} \right\|_{\infty}.$$

(où $\left\| f^{(n+1)} \right\|_{\infty} = \sup \left\{ \left| f^{(n+1)}(x) \right| \,,\ x \in [a\,;b] \right\}$).

Corollaire:

> Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) sur I. Alors, pour tous $a, x \in I$:
>
> $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + O\left((x-a)^{n+1}\right).$$

Rappelons que la notation $O\left((x-a)^{n+1}\right)$ désigne une fonction de la forme $(x-a)^{n+1}\varphi(x)$ où φ est définie et bornée au voisinage de a.

FONCTIONS CONVEXES

Définition 6

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Une fonction numérique $f : I \to \mathbb{R}$ est dite <u>convexe</u> si :

$$\forall (x, y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0\,;1],\ f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Définition 6

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Une fonction numérique $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe si :

$$\forall (x, y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0\,;1],\ f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Interprétation géométrique :

Dire que f est convexe équivaut à dire que le graphe de sa restriction à un sous-intervalle quelconque $[x\,;y]$ de I est situé au-dessous de la corde joignant les points de coordonnées $\big(x, f(x)\big)$ et $\big(y, f(y)\big)$.

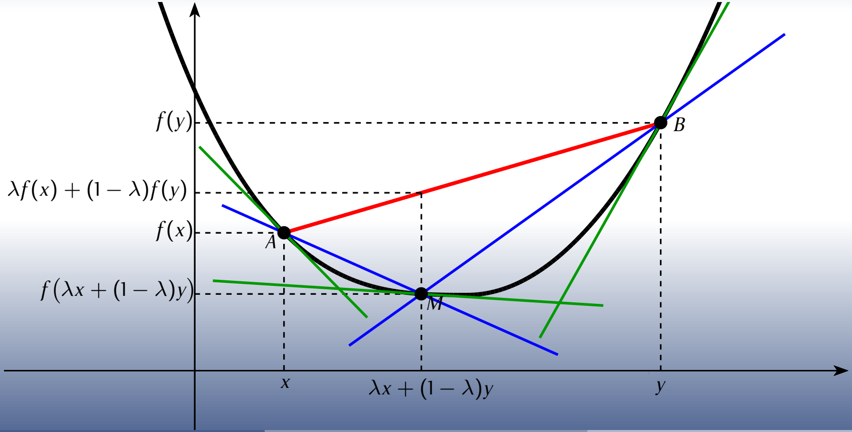
Définition 6

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Une fonction numérique $f : I \to \mathbb{R}$ est dite <u>convexe</u> si :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0\,;1],\ f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Interprétation géométrique :

Dire que f est convexe équivaut à dire que le graphe de sa restriction à un sous-intervalle quelconque $[x\,;y]$ de I est situé au-dessous de la corde joignant les points de coordonnées $\big(x, f(x)\big)$ et $\big(y, f(y)\big)$.



On peut remarquer que f est convexe sur I si et seulement si son épigraphe est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$ (notion définie dans le chapitre sur les espaces vectoriels normés).

On peut remarquer que f est convexe sur I si et seulement si son épigraphe est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$ (notion définie dans le chapitre sur les espaces vectoriels normés).

On remarque sur la figure que :

$$\mathrm{pente}((AM)) \leqslant \mathrm{pente}((AB)) \leqslant \mathrm{pente}((MB)).$$

On peut remarquer que f est convexe sur I si et seulement si son épigraphe est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$ (notion définie dans le chapitre sur les espaces vectoriels normés).

On remarque sur la figure que :

$$\text{pente}((AM)) \leqslant \text{pente}((AB)) \leqslant \text{pente}((MB)).$$

Démontrons-le.

On peut remarquer que f est convexe sur I si et seulement si son épigraphe est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$ (notion définie dans le chapitre sur les espaces vectoriels normés).

On remarque sur la figure que :

$$\text{pente}((AM)) \leqslant \text{pente}((AB)) \leqslant \text{pente}((MB)).$$

Démontrons-le.

***Lemme**: inégalité des 3 pentes*

Soit f une fonction convexe sur I ; soient $x, y \in I$ avec $x < y$, et $z \in]x\,;y[$. Alors on a les inégalités :

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \quad \text{et} \quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}.$$

Réciproquement, si l'une ou l'autre de ces inégalités est vérifiée pour tout $[x\,;y] \subset I$ et tout $z \in]x\,;y[$, alors f est convexe sur I.

On peut remarquer que f est convexe sur I si et seulement si son épigraphe est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$ (notion définie dans le chapitre sur les espaces vectoriels normés).

On remarque sur la figure que :

$$\text{pente}((AM)) \leqslant \text{pente}((AB)) \leqslant \text{pente}((MB)).$$

Démontrons-le.

***Lemme**: inégalité des 3 pentes*

Soit f une fonction convexe sur I ; soient $x, y \in I$ avec $x < y$, et $z \in]x\,;y[$. Alors on a les inégalités :

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \quad \text{et} \quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}\,.$$

Réciproquement, si l'une ou l'autre de ces inégalités est vérifiée pour tout $[x\,;y] \subset I$ et tout $z \in]x\,;y[$, alors f est convexe sur I.

Démonstration

On peut trouver $\lambda \in]0\,;1[$ tel que $z = \lambda x + (1-\lambda)y$: il suffit de résoudre une équation du 1er degré, on trouve $\lambda = \frac{z-y}{x-y}$ $\cdot$ (qui appartient bien à $]0\,;1[$).

On peut remarquer que f est convexe sur I si et seulement si son épigraphe est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$ (notion définie dans le chapitre sur les espaces vectoriels normés).

On remarque sur la figure que :

$$\text{pente}((AM)) \leqslant \text{pente}((AB)) \leqslant \text{pente}((MB)).$$

Démontrons-le.

Lemme: *inégalité des 3 pentes*

Soit f une fonction convexe sur I ; soient $x, y \in I$ avec $x < y$, et $z \in]x\,;y[$. Alors on a les inégalités :

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \quad \text{et} \quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}\,.$$

Réciproquement, si l'une ou l'autre de ces inégalités est vérifiée pour tout $[x\,;y] \subset I$ et tout $z \in]x\,;y[$, alors f est convexe sur I.

Démonstration

On peut trouver $\lambda \in]0\,;1[$ tel que $z = \lambda x + (1-\lambda)y$: il suffit de résoudre une équation du 1er degré, on trouve $\lambda = \frac{z-y}{x-y}$ $\cdot$ (qui appartient bien à $]0\,;1[$). On a alors, par exemple :

$$\begin{aligned} f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) &\iff f(z) - f(x) \leqslant (1-\lambda)\big(f(y) - f(x)\big) \\ &\iff f(z) - f(x) \leqslant \frac{x-z}{x-y}\big(f(y) - f(x)\big) \end{aligned}$$

On peut remarquer que f est convexe sur I si et seulement si son épigraphe est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$ (notion définie dans le chapitre sur les espaces vectoriels normés).

On remarque sur la figure que :

$$\text{pente}((AM)) \leqslant \text{pente}((AB)) \leqslant \text{pente}((MB)).$$

Démontrons-le.

Lemme: *inégalité des 3 pentes*

Soit f une fonction convexe sur I ; soient $x, y \in I$ avec $x < y$, et $z \in]x\,;y[$. Alors on a les inégalités :

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \quad \text{et} \quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}\cdot$$

Réciproquement, si l'une ou l'autre de ces inégalités est vérifiée pour tout $[x\,;y] \subset I$ et tout $z \in]x\,;y[$, alors f est convexe sur I.

Démonstration

On peut trouver $\lambda \in]0\,;1[$ tel que $z = \lambda x + (1-\lambda)y$: il suffit de résoudre une équation du 1er degré, on trouve $\lambda = \frac{z-y}{x-y}\cdot$ (qui appartient bien à $]0\,;1[$). On a alors, par exemple :

$$\begin{aligned} f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) &\iff f(z) - f(x) \leqslant (1-\lambda)\big(f(y)-f(x)\big) \\ &\iff f(z) - f(x) \leqslant \frac{x-z}{x-y}\big(f(y)-f(x)\big) \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à la 1ère des inégalités proposées.

Théorème 16

Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle ouvert I.
Pour que f soit convexe sur I il faut et il suffit que sa fonction dérivée f' soit croissante sur I

Théorème 16

Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle ouvert I.
Pour que f soit convexe sur I il faut et il suffit que sa fonction dérivée f' soit croissante sur I

Démonstration

- Supposons d'abord f convexe et dérivable sur I, et soient $x, y \in I$ avec $x < y$.

Théorème 16

Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle ouvert I.
Pour que f soit convexe sur I il faut et il suffit que sa fonction dérivée f' soit croissante sur I

Démonstration

- Supposons d'abord f convexe et dérivable sur I, et soient $x, y \in I$ avec $x < y$. On a vu que l'on a, pour tout $z \in \,]x\,;y[$:

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\,.$$

Théorème 16

Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle ouvert I.
Pour que f soit convexe sur I il faut et il suffit que sa fonction dérivée f' soit croissante sur I

Démonstration

- Supposons d'abord f convexe et dérivable sur I, et soient $x, y \in I$ avec $x < y$. On a vu que l'on a, pour tout $z \in \left]x\,;y\right[$:

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

En faisant tendre z vers x à droite , on en déduit : $f'(x) = f'_d(x) \leqslant \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$.

Théorème 16

Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle ouvert I.
Pour que f soit convexe sur I il faut et il suffit que sa fonction dérivée f' soit croissante sur I

Démonstration

- Supposons d'abord f convexe et dérivable sur I, et soient $x, y \in I$ avec $x < y$. On a vu que l'on a, pour tout $z \in]x\,;y[$:

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\,.$$

  En faisant tendre z vers x à droite , on en déduit : $f'(x) = f'_d(x) \leqslant \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$.

  On a aussi :

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

Théorème 16

Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle ouvert I.
Pour que f soit convexe sur I il faut et il suffit que sa fonction dérivée f' soit croissante sur I

Démonstration

- Supposons d'abord f convexe et dérivable sur I, et soient $x, y \in I$ avec $x < y$. On a vu que l'on a, pour tout $z \in]x\,;y[$:

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

En faisant tendre z vers x à droite , on en déduit : $f'(x) = f'_d(x) \leqslant \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$.

On a aussi :

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

donc en faisant tendre z vers y à gauche, on en déduit $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant f'_g(y) = f'(y)$.

Théorème 16

Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle ouvert I.
Pour que f soit convexe sur I il faut et il suffit que sa fonction dérivée f' soit croissante sur I

Démonstration

- Supposons d'abord f convexe et dérivable sur I, et soient $x, y \in I$ avec $x < y$. On a vu que l'on a, pour tout $z \in]x\,;y[$:

  $$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

  En faisant tendre z vers x à droite , on en déduit : $f'(x) = f'_d(x) \leqslant \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$.

  On a aussi :

  $$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

  donc en faisant tendre z vers y à gauche, on en déduit $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant f'_g(y) = f'(y)$.

  En particulier, on a $f'(x) \leqslant f'(y)$: f' est croissante.

Théorème 16

Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle ouvert I.
Pour que f soit convexe sur I il faut et il suffit que sa fonction dérivée f' soit croissante sur I

Démonstration

- Réciproquement, supposons f' croissante sur I. Soient alors $x, y \in I$ avec $x < y$, $\lambda \in]0\,;1[$ et $z = \lambda x + (1-\lambda)y$.

Théorème 16

Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle ouvert I.
Pour que f soit convexe sur I il faut et il suffit que sa fonction dérivée f' soit croissante sur I

Démonstration

- Réciproquement, supposons f' croissante sur I. Soient alors $x, y \in I$ avec $x < y$, $\lambda \in]0\,;1[$ et $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. On a $z \in]x\,;y[$, et, en appliquant le théorème des accroissements finis sur $[x\,;z]$ et $[z\,;y]$ on obtient l'existence de $c \in]x\,;z[$ et de $d \in]z\,;y[$ tels que :

$$f(z) - f(x) = (z-x)f'(c) \quad \text{et} \quad f(y) - f(z) = (y-z)f'(d).$$

Théorème 16

Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle ouvert I.
Pour que f soit convexe sur I il faut et il suffit que sa fonction dérivée f' soit croissante sur I

Démonstration

- Réciproquement, supposons f' croissante sur I. Soient alors $x, y \in I$ avec $x < y$, $\lambda \in]0\,;1[$ et $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. On a $z \in]x\,;y[$, et, en appliquant le théorème des accroissements finis sur $[x\,;z]$ et $[z\,;y]$ on obtient l'existence de $c \in]x\,;z[$ et de $d \in]z\,;y[$ tels que :

$$f(z) - f(x) = (z-x)f'(c) \quad \text{et} \quad f(y) - f(z) = (y-z)f'(d).$$

f' étant croissante, on a $f'(c) \leqslant f'(d)$, d'où $\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \dfrac{f(y)-f(z)}{y-z}$

Théorème 16

Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle ouvert I.
Pour que f soit convexe sur I il faut et il suffit que sa fonction dérivée f' soit croissante sur I

Démonstration

- Réciproquement, supposons f' croissante sur I. Soient alors $x, y \in I$ avec $x < y$, $\lambda \in]0\,;1[$ et $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. On a $z \in]x\,;y[$, et, en appliquant le théorème des accroissements finis sur $[x\,;z]$ et $[z\,;y]$ on obtient l'existence de $c \in]x\,;z[$ et de $d \in]z\,;y[$ tels que :

$$f(z) - f(x) = (z-x)f'(c) \quad \text{et} \quad f(y) - f(z) = (y-z)f'(d).$$

f' étant croissante, on a $f'(c) \leqslant f'(d)$, d'où $\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \dfrac{f(y)-f(z)}{y-z}$ ou encore, puisque $y - z = \lambda(y-x)$ et $z - x = (1-\lambda)(y-x)$,

$$\frac{f(z)-f(x)}{1-\lambda} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{\lambda}$$

Théorème 16

Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle ouvert I.
Pour que f soit convexe sur I il faut et il suffit que sa fonction dérivée f' soit croissante sur I

Démonstration

- Réciproquement, supposons f' croissante sur I. Soient alors $x, y \in I$ avec $x < y$, $\lambda \in]0\,;1[$ et $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. On a $z \in]x\,;y[$, et, en appliquant le théorème des accroissements finis sur $[x\,;z]$ et $[z\,;y]$ on obtient l'existence de $c \in]x\,;z[$ et de $d \in]z\,;y[$ tels que :

$$f(z) - f(x) = (z-x)f'(c) \quad \text{et} \quad f(y) - f(z) = (y-z)f'(d).$$

f' étant croissante, on a $f'(c) \leqslant f'(d)$, d'où $\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \dfrac{f(y)-f(z)}{y-z}$ ou encore, puisque $y - z = \lambda(y-x)$ et $z - x = (1-\lambda)(y-x)$,

$$\frac{f(z)-f(x)}{1-\lambda} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{\lambda}$$

d'où l'on tire $f(z) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$, ce qui démontre la convexité de f.

Théorème 16

Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle ouvert I.
Pour que f soit convexe sur I il faut et il suffit que sa fonction dérivée f' soit croissante sur I

Démonstration

- Réciproquement, supposons f' croissante sur I. Soient alors $x, y \in I$ avec $x < y$, $\lambda \in]0\,;1[$ et $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. On a $z \in]x\,;y[$, et, en appliquant le théorème des accroissements finis sur $[x\,;z]$ et $[z\,;y]$ on obtient l'existence de $c \in]x\,;z[$ et de $d \in]z\,;y[$ tels que :

$$f(z) - f(x) = (z-x)f'(c) \quad \text{et} \quad f(y) - f(z) = (y-z)f'(d).$$

f' étant croissante, on a $f'(c) \leqslant f'(d)$, d'où $\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \dfrac{f(y)-f(z)}{y-z}$ ou encore, puisque $y - z = \lambda(y-x)$ et $z - x = (1-\lambda)(y-x)$,

$$\frac{f(z)-f(x)}{1-\lambda} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{\lambda}$$

d'où l'on tire $f(z) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$, ce qui démontre la convexité de f.

Remarque : En reprenant la figure ci-dessus, on a montré au passage (1ère partie de la démonstration) que la pente de la tangente en A est inférieure à celle de la droite (AB), elle-même inférieure à celle de la tangente en B.

Théorème 16

Soit f une fonction numérique dérivable sur un intervalle ouvert I.
Pour que f soit convexe sur I il faut et il suffit que sa fonction dérivée f' soit croissante sur I

Démonstration

- Réciproquement, supposons f' croissante sur I. Soient alors $x, y \in I$ avec $x < y$, $\lambda \in]0\,;1[$ et $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. On a $z \in]x\,;y[$, et, en appliquant le théorème des accroissements finis sur $[x\,;z]$ et $[z\,;y]$ on obtient l'existence de $c \in]x\,;z[$ et de $d \in]z\,;y[$ tels que :

$$f(z) - f(x) = (z-x)f'(c) \quad \text{et} \quad f(y) - f(z) = (y-z)f'(d).$$

f' étant croissante, on a $f'(c) \leqslant f'(d)$, d'où $\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \dfrac{f(y)-f(z)}{y-z}$ ou encore, puisque $y - z = \lambda(y-x)$ et $z - x = (1-\lambda)(y-x)$,

$$\frac{f(z)-f(x)}{1-\lambda} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{\lambda}$$

d'où l'on tire $f(z) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$, ce qui démontre la convexité de f.

Remarque : En reprenant la figure ci-dessus, on a montré au passage (1ère partie de la démonstration) que la pente de la tangente en A est inférieure à celle de la droite (AB), elle-même inférieure à celle de la tangente en B.

Corollaire:

> Pour qu'une fonction numérique f, définie sur un intervalle ouvert I et deux fois dérivable sur I, soit convexe, il faut et il suffit que pour tout $x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$.

Nouvelle interprétation géométrique de la convexité

Nouvelle interprétation géométrique de la convexité

Théorème 17

Pour qu'une fonction numérique f dérivable sur un intervalle ouvert I soit convexe, il faut et il suffit que son graphe soit tout entier situé au-dessus de ses tangentes.

Nouvelle interprétation géométrique de la convexité

Théorème 17

Pour qu'une fonction numérique f dérivable sur un intervalle ouvert I soit convexe, il faut et il suffit que son graphe soit tout entier situé au-dessus de ses tangentes.

Démonstration

- Supposons f convexe, et soit $a \in I$. L'équation de la tangente en a est :

$$y = (x-a)f'(a) + f(a)$$

Nouvelle interprétation géométrique de la convexité

Théorème 17

Pour qu'une fonction numérique f dérivable sur un intervalle ouvert I soit convexe, il faut et il suffit que son graphe soit tout entier situé au-dessus de ses tangentes.

Démonstration

- Supposons f convexe, et soit $a \in I$. L'équation de la tangente en a est :

$$y = (x-a)f'(a) + f(a)$$

et l'étude de la fonction $x \mapsto f(x) - (x-a)f'(a) - f(a)$ permet de conclure.

Nouvelle interprétation géométrique de la convexité

Théorème 17

Pour qu'une fonction numérique f dérivable sur un intervalle ouvert I soit convexe, il faut et il suffit que son graphe soit tout entier situé au-dessus de ses tangentes.

Démonstration

- Supposons f convexe, et soit $a \in I$. L'équation de la tangente en a est :
$$y = (x-a)f'(a) + f(a)$$
et l'étude de la fonction $x \mapsto f(x) - (x-a)f'(a) - f(a)$ permet de conclure.
- Réciproquement, supposons que le graphe de f est situé au-dessus de toutes ses ses tangentes. Soient $a, b \in I$, avec $a < b$.

Nouvelle interprétation géométrique de la convexité

Théorème 17

Pour qu'une fonction numérique f dérivable sur un intervalle ouvert I soit convexe, il faut et il suffit que son graphe soit tout entier situé au-dessus de ses tangentes.

Démonstration

- Supposons f convexe, et soit $a \in I$. L'équation de la tangente en a est :

  $$y = (x - a)f'(a) + f(a)$$

  et l'étude de la fonction $x \mapsto f(x) - (x - a)f'(a) - f(a)$ permet de conclure.

- Réciproquement, supposons que le graphe de f est situé au-dessus de toutes ses ses tangentes. Soient $a, b \in I$, avec $a < b$.

  La courbe étant située au-dessus de sa tangente en a on a :

  $$\forall\, x \in I,\ f(x) \geqslant (x - a)f'(a) + f(a)$$

  et en particulier pour $x = b$ on obtient (puisque $b > a$) : $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \geqslant f'(a)$.

Nouvelle interprétation géométrique de la convexité

Théorème 17

Pour qu'une fonction numérique f dérivable sur un intervalle ouvert I soit convexe, il faut et il suffit que son graphe soit tout entier situé au-dessus de ses tangentes.

Démonstration

- Supposons f convexe, et soit $a \in I$. L'équation de la tangente en a est :

$$y = (x-a)f'(a) + f(a)$$

et l'étude de la fonction $x \mapsto f(x) - (x-a)f'(a) - f(a)$ permet de conclure.

- Réciproquement, supposons que le graphe de f est situé au-dessus de toutes ses ses tangentes. Soient $a, b \in I$, avec $a < b$.

La courbe étant située au-dessus de sa tangente en a on a :

$$\forall\, x \in I,\ f(x) \geqslant (x-a)f'(a) + f(a)$$

et en particulier pour $x = b$ on obtient (puisque $b > a$) : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \geqslant f'(a)$.

La courbe étant située au-dessus de sa tangente en b on a :

$$\forall\, x \in I,\ f(x) \geqslant (x-b)f'(b) + f(b)$$

et en particulier pour $x = a$ on obtient (puisque $b > a$) : $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} \leqslant f'(b)$.

Nouvelle interprétation géométrique de la convexité

Théorème 17

Pour qu'une fonction numérique f dérivable sur un intervalle ouvert I soit convexe, il faut et il suffit que son graphe soit tout entier situé au-dessus de ses tangentes.

Démonstration

- Supposons f convexe, et soit $a \in I$. L'équation de la tangente en a est :
  $$y = (x-a)f'(a) + f(a)$$
  et l'étude de la fonction $x \mapsto f(x) - (x-a)f'(a) - f(a)$ permet de conclure.
- Réciproquement, supposons que le graphe de f est situé au-dessus de toutes ses ses tangentes. Soient $a, b \in I$, avec $a < b$.
  La courbe étant située au-dessus de sa tangente en a on a :
  $$\forall\, x \in I,\ f(x) \geqslant (x-a)f'(a) + f(a)$$
  et en particulier pour $x = b$ on obtient (puisque $b > a$) : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \geqslant f'(a)$.
  La courbe étant située au-dessus de sa tangente en b on a :
  $$\forall\, x \in I,\ f(x) \geqslant (x-b)f'(b) + f(b)$$
  et en particulier pour $x = a$ on obtient (puisque $b > a$) : $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b} \leqslant f'(b)$.
  Avec les deux inégalités précédentes, on obtient $f'(a) \leqslant f'(b)$ donc f' est croissante et f est convexe.

Nouvelle interprétation géométrique de la convexité

Théorème 17

Pour qu'une fonction numérique f dérivable sur un intervalle ouvert I soit convexe, il faut et il suffit que son graphe soit tout entier situé au-dessus de ses tangentes.

Application à l'obtention de certaines inégalités :

L'étude de la convexité de certaines fonctions permet d'obtenir facilement certaines inégalités célèbres :

Nouvelle interprétation géométrique de la convexité

Théorème 17

Pour qu'une fonction numérique f dérivable sur un intervalle ouvert I soit convexe, il faut et il suffit que son graphe soit tout entier situé au-dessus de ses tangentes.

Application à l'obtention de certaines inégalités :

L'étude de la convexité de certaines fonctions permet d'obtenir facilement certaines inégalités célèbres :

1. $\forall\, x > -1,\ \ln x \leqslant x - 1.$

Nouvelle interprétation géométrique de la convexité

Théorème 17

Pour qu'une fonction numérique f dérivable sur un intervalle ouvert I soit convexe, il faut et il suffit que son graphe soit tout entier situé au-dessus de ses tangentes.

Application à l'obtention de certaines inégalités :

L'étude de la convexité de certaines fonctions permet d'obtenir facilement certaines inégalités célèbres :

1. $\forall x > -1,\ \ln x \leqslant x - 1.$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant x - 1.$

Nouvelle interprétation géométrique de la convexité

Théorème 17

Pour qu'une fonction numérique f dérivable sur un intervalle ouvert I soit convexe, il faut et il suffit que son graphe soit tout entier situé au-dessus de ses tangentes.

Application à l'obtention de certaines inégalités :

L'étude de la convexité de certaines fonctions permet d'obtenir facilement certaines inégalités célèbres :

1. $\forall\, x > -1,\ \ln x \leqslant x - 1.$
2. $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geqslant x - 1.$
3. $\forall\, x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right],\ \dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x.$

Nouvelle interprétation géométrique de la convexité

Théorème 17

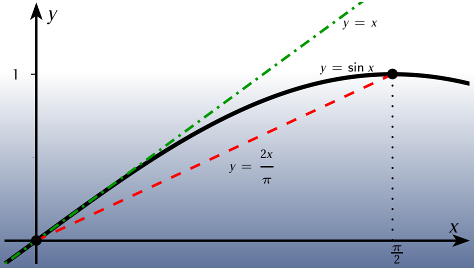
Pour qu'une fonction numérique f dérivable sur un intervalle ouvert I soit convexe, il faut et il suffit que son graphe soit tout entier situé au-dessus de ses tangentes.

Application à l'obtention de certaines inégalités :

L'étude de la convexité de certaines fonctions permet d'obtenir facilement certaines inégalités célèbres :

1. $\forall x > -1,\ \ln x \leqslant x - 1.$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant x - 1.$
3. $\forall x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right],\ \dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x.$

Ci-dessous, l'interprétation géométrique de la 3ème inégalité :



Pour terminer, donnons la définition suivante :

Définition 7

Une fonction numérique f définie sur un intervalle I est dite <u>concave</u> si la fonction $-f$ est convexe.

Pour terminer, donnons la définition suivante :

Définition 7

Une fonction numérique f définie sur un intervalle I est dite concave si la fonction $-f$ est convexe.

Cela équivaut à dire que :

- $\forall (x, y) \in I^2, \ \forall \lambda \in [0\,;1], \ f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$

Pour terminer, donnons la définition suivante :

Définition 7

Une fonction numérique f définie sur un intervalle I est dite <u>concave</u> si la fonction $-f$ est convexe.

Cela équivaut à dire que :

- $\forall\,(x,y) \in I^2,\ \forall\,\lambda \in [0\,;1],\ f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.
- Pour f dérivable, f' est décroissante (et $f'' \leqslant 0$ pour f deux fois dérivable).

Pour terminer, donnons la définition suivante :

Définition 7

Une fonction numérique f définie sur un intervalle I est dite <u>concave</u> si la fonction $-f$ est convexe.

Cela équivaut à dire que :

- $\forall (x, y) \in I^2,\ \forall \lambda \in [0\,;1],\ f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$
- Pour f dérivable, f' est décroissante (et $f'' \leqslant 0$ pour f deux fois dérivable).
- le graphe de f est situé au-dessus de ses cordes et en-desous de ses tangentes (pour f dérivable).

DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS USUELS AU VOISINAGE DE 0

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O(x^7)$$

$$\cot(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + O(x^5)$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+3})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + O(x^{n+1})$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O(x^{n+1})$$

$$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O(x^{2n+3})$$

$$\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{th}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O(x^7)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + O(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + O(x^{n+1})$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n.n!}x^n + O(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + \cdots + (-1)^n\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n.n!}x^n + O(x^{n+1})$$

(Les développements limités de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ ne sont évidemment pas à retenir par coeur : ils s'obtiennent facilement à partir du développement limité de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ en prenant respectivement $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $\alpha = -\dfrac{1}{2}$).