EXERCICES : CALCUL MATRICIEL

Ensembles de matrices remarquables (ex. 1 à 8)

Exercice 1: (⋆)

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ contenant J et stable par multiplication ; en préciser une base.

Exercice 2: (⋆)

On considère dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ -1&0&0&0 \\ 0&0&0&-1 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \\ -1&0&0&0 \\ 0&-1&0&0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0&0&0&1 \\ 0&0&-1&0 \\ 0&1&0&0 \\ -1&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

a) Comparer A^2, B^2, C^2 et I, puis AB, BA et C ; BC, CB et A ; CA, AC et B.

b) Montrer que (I, A, B, C) est un système libre de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
On note $\mathbb{H}$ le sous-espace vectoriel engendré par ces quatre matrices.

c) Montrer que la multiplication est une loi interne non commutative dans $\mathbb{H}$.

d) Soit $\phi : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$, qui à $M = xI + yA + zB + tC$ associe $\phi(M) = xI - yA - zB - tC$.
Montrer que ϕ est un automorphisme involutif de l'espace vectoriel $\mathbb{H}$. Est-ce un morphisme pour la loi $\times$?

e) Pour $M \in \mathbb{H}$, calculer $\phi(M)M$ et $M\phi(M)$. En déduire que toute matrice non nulle de $\mathbb{H}$ est inversible et préciser son inverse.
($\mathbb{H}$ s'appelle le *corps des quaternions)*).

Exercice 3: (⋆)

Notons $\mathcal{S} = \left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; \forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2,\ a_{ij} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1\,;n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \right\}$ l'ensemble des matrices dites <u>stochastiques</u>.
Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par multiplication.

Exercice 4: (⋆⋆)

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on note $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et J la matrice carrée d'ordre n dont tous les éléments sont égaux à 1.
Puis on considère l'ensemble $F = \left\{ M(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, en préciser la dimension.

b) Calculer le produit de deux éléments de F à l'aide de J.

c) Calculer $M(a,b)^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

d) Trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur (a,b) pour que $M(a,b)$ soit inversible et préciser alors son inverse.

Exercice 5: ***Matrices centrosymétriques*** **(⋆⋆⋆)**

On dit qu'une matrice $A = \left(a_{i,j}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est centro-symétrique si

$$\forall\,(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2, a_{n+1-i,n+1-j} = a_{i,j}\,.$$

a) Montrer que le sous-ensemble $\mathcal{C}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formé des matrices centro-symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Préciser sa dimension.

b) Montrer que le produit de deux matrices centro-symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est aussi centro-symétrique.

c) Soit A centro-symétrique et inversible.
En considérant l'application $X \mapsto AX$ de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$, montrer que A^{-1} est centro-symétrique.

Exercice 6: (⋆⋆)

Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont deux à deux distincts.
Montrer que $(I_n, D, D^2, \ldots, D^{n-1})$ est une base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formé des matrices diagonales.

Exercice 7: (⋆⋆)

Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure.
Montrer que T commute avec sa transposée si et seulement si la matrice T est diagonale.
Indication : procéder par récurrence sur n, et utiliser un produit par blocs.

Exercice 8: (⋆⋆)

Soit $n \geqslant 2$. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toutes les matrices symétriques.

Puissances et inverse d'une matrice (ex. 9 à 19)

Exercice 9: (✍)

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer $(A + I_3)^3$; en déduire que A est inversible et préciser son inverse.

Exercice 10: (⋆⋆)

Résoudre l'équation $X^2 = A$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$ (on remarquera que, si X est solution, alors A et X commutent).

Exercice 11: (⋆⋆)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & a & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \ddots & a \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$, A^{-1} et A^p pour $p \in \mathbb{Z}$.

Exercice 12: (⋆)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dire pourquoi A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 13: (⋆)

Justifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 14: (⋆⋆)

Soit $A = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \dots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \dots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \binom{n}{n} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. Calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$, A^{-1} et A^p pour $p \in \mathbb{Z}$.

Indication : Considérer A comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ que l'on précisera.

Exercice 15: (⋆⋆)

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$. On pose :

$$A = \left(\omega^{(k-1)(\ell-1)}\right)_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Calculer le produit $A\overline{A}$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 16: (⋆)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices telles que $AB = A + B$.
Montrer que $(A - I_n) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et calculer $(A - I_n)^{-1}$.

Exercice 17: (⋆⋆)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice vérifiant $A^k = I_n$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.
On pose $B = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$, et on note u, v les endomorphismes de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés à A et B.
Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}\, v$, $\quad \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}\, v$, $\quad \mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}\, v \oplus \mathrm{Im}\, v$ et $\mathrm{tr}\, B = k \,\mathrm{rg}\, B$.

Exercice 18: (⋆⋆)

a) On suppose que $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent et que A est inversible.
Montrer que les matrices A^{-1} et B commutent.

b) Montrer que si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente alors la matrice $I_n + N$ est inversible.

c) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ où B est nilpotente et commute avec A. Montrer que :

$$A \text{ inversible} \iff A + B \text{ inversible.}$$

Exercice 19: ***Théorème de Hadamard*** **(⋆⋆)**

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que :

$$\forall\, i \in [\![1\,;n]\!]\ ,\ \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|\ <\ |a_{ii}|$$

(une telle matrice est dite *à diagonale strictement dominante*).

Montrer que A est inversible (*on pourra raisonner par l'absurde, en supposant qu'il existe* $X \neq 0$ *tel que* $AX = 0$).

Matrice d'une application linéaire (ex. 20 à 25)

Exercice 20: (⋆)

Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que l'application linéaire canoniquement associée à A est un projecteur, et préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 21: (⋆)

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$, de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

a) Calculer le rang de f. Former un système d'équations de $\operatorname{Im} f$ et en donner une base.

b) Former un système d'équations de $\operatorname{Ker} f$ et en donner une base.

c) Déterminer l'image et l'image réciproque par f du sous-espace d'équation $x - y + z - 2t = 0$.

Exercice 22: (⋆)

On considère les sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$P = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\Big\} \text{ et } D = \operatorname{Vect}(w) \text{ où } w = (1,0,-1)\,.$$

On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On note p la projection vectorielle sur P parallèlement à D, q celle sur D parallèlement à P, et enfin, s la symétrie vectorielle par rapport à P et parallèlement à D.

a) Former la matrice de p dans $\mathscr{B}$.

b) En déduire les matrices dans $\mathscr{B}$ de q et de s.

Exercice 23: (⋆⋆)

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. On considère l'application $u\colon \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & MA \end{array}$.

Montrer que $u \in \mathscr{L}(E)$, trouver son image et son noyau, préciser sa matrice dans la base canonique de E.

Exercice 24: (⋆⋆⋆)

Soient $f, g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $f^2 = g^2 = 0$ et $f \circ g = g \circ f$.

Calculer $f \circ g$ (*Indication : utiliser la matrice de* f *dans une « bonne » base*).

Exercice 25: (⋆⋆)

Soit f un endomorphisme non nul d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3 vérifiant $f^3 + f = 0$.

a) Montrer que :
$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}).$$

b) Prouver que : $\dim \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}) \geqslant 1$. Montrer que, si $x \in \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}) \setminus \{0\}$ alors $(x, f(x))$ est une famille libre de $\operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$.

c) Que vaut $\det(-\mathrm{Id}_E)$? En déduire $\dim \operatorname{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}) = 2$.

d) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Matrices semblables (ex. 26 à 29)

Exercice 26: (⋆)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
On pose $\varepsilon_1 = e_1 + e_3$, $\varepsilon_2 = e_1 + e_2$ et $\varepsilon_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

a) Montrer que $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ forme une base de E et déterminer la matrice de f dans $\mathscr{B}'$.

b) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 27: (⋆)

Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?
Si oui, déterminer $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Exercice 28: (⋆⋆⋆)

Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que la matrice produit AB soit semblable à la matrice : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. Calculer BA.

Exercice 29: (⋆⋆)

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$.

a) Montrer que A est semblable à la matrice : $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Montrer que $E = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par (I, A, A^2).

Matrices par blocs (ex. 30 à 33)

Exercice 30: (⋆)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^4$ et $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.
On suppose M, A, D inversibles. Exprimer M^{-1} sous forme de blocs.

Exercice 31: (⋆⋆)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, et $f \in \mathscr{L}(E)$ non nul tel que $f^2 = 0$.
Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que la matrice de f dans $\mathscr{B}$ soit de la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercice 32: (⋆⋆)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 = -\mathrm{Id}_E$.

a) Montrer que, pour tout $x \in E - \{0_E\}$, la famille $\{x, u(x)\}$ est libre.

b) Montrer que, pour tout entier p tel que $2 \leqslant 2p \leqslant n$, il existe un p-uplet de vecteurs $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ tel que le système $(a_1, \ldots, a_p, u(a_1), \ldots, u(a_p))$ soit libre.

c) Montrer que n est pair, et que, si l'on pose $n = 2m$, il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u s'écrit (par blocs) : $\begin{bmatrix} 0_m & -I_m \\ I_m & 0_m \end{bmatrix}$.

Exercice 33: (⋆⋆⋆)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $3n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), et u un endomorphisme de E tel que : $\operatorname{rg} u = 2n$ et $u^3 = 0$.

a) Montrer que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u^2$.

b) Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u s'écrit (par blocs) : $\begin{bmatrix} 0_n & 0_n & 0_n \\ I_n & 0_n & 0_n \\ 0_n & I_n & 0_n \end{bmatrix}$

Rang d'une matrice (ex. 34 à 41)

Exercice 34: (⋆)

a) Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Comparer $\mathrm{rg}(AB)$, $\mathrm{rg}(A)$ et $\mathrm{rg}(B)$. Préciser dans le cas A ou B inversible.

b) Existe-il $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$?

Exercice 35: (⋆⋆)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Donner le rang de M.

b) Préciser noyau et image de M.

c) Calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 36: (⋆⋆)

a) Soit $M \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$ une matrice écrite par blocs : $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$.
Montrer que $\text{rg}(M) = \text{rg}(A) + \text{rg}(B)$.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = \begin{bmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & A \end{bmatrix}$, décomposée en p blocs, élément de $\mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$.
Comparer $\text{rg}(A)$ et $\text{rg}(B)$.

Exercice 37: (⋆⋆⋆)

Soit $M \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$ une matrice partitionnée par blocs : $M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$.

a) Montrer que : $\text{rg}(M) \geqslant \text{rg}(A) + \text{rg}(C)$.

b) Montrer que, si A est inversible, il y a égalité.

c) Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ telles que, pour toute $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, on ait :

$$\text{rg}\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix}\right) = \text{rg}(A) + \text{rg}(C).$$

Montrer que A ou C est inversible.

Exercice 38: (⋆⋆)

Soit M une matrice partitionnée par blocs : $M = \begin{bmatrix} A & 2A \\ 3A & 4A \end{bmatrix}$, où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Déterminer le rang de M en fonction de celui de A.

Exercice 39: (⋆⋆)

Soit M une matrice partitionnée par blocs : $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$.
Montrer que : $\text{rg}\, M \leqslant \text{rg}\, A + \text{rg}\, B + \text{rg}\, C + \text{rg}\, D$.

Exercice 40: (⋆⋆⋆)

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$.
Montrer que : $\text{rg}(M) = n + \text{rg}(CA^{-1}B - D)$ (on multipliera M à gauche par une matrice convenable).

Exercice 41: Matrices de rang 1 (⋆⋆)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée de rang 1.

a) Établir l'existence de colonnes $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ vérifiant $A = X{}^tY$.
Réciproquement, que peut-on dire d'une matrice de cette forme ?

b) En déduire l'existence de $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A^2 = \lambda A$.

Trace d'une matrice, d'un endomorphisme (ex. 42 à 47)

Exercice 42:($\star\star$)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, données avec $\operatorname{tr} A \neq 0$. Résoudre l'équation d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:
$$\operatorname{tr}(A)M - \operatorname{tr}(M)A = B.$$

Exercice 43: ($\star\star$)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A \neq 0$.
Résoudre l'équation : $X + \operatorname{tr}(X)A = B$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 44: ($\star$)

Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :
$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \varphi(AB) = \varphi(BA).$$
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :
$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \varphi(A) = \lambda \operatorname{tr}(A).$$

Exercice 45: ($\star\star\star$)

Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $V, W \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on ait $\operatorname{tr}(UVW) = \operatorname{tr}(VUW)$.
Montrer que U est une matrice scalaire.

Exercice 46: ($\star\star\star$)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\phi : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX + XA \end{array} \right.$
Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et calculer sa trace en fonction de celle de A.

Exercice 47: *Projecteurs* ($\star\star$)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ une famille de projecteurs de E . Démontrer l'équivalence des propriétés suivantes :
   a) $i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0$.
   b) $p = \sum_{i=1}^{k} p_i$ est un projecteur.
2. Soit $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ une famille d'endomorphismes de E, tels que $\sum_{i=1}^{k} p_i = \operatorname{Id}_E$. Démontrer l'équivalence des propriétés suivantes :
   a) $i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0$.
   b) pour tout $i \in [\![1 ; k]\!]$, p_i est un projecteur.