EXERCICES : ESPACES PRÉHILBERTIENS

Exercice 1: (⋆)

Les couples (E,φ) suivants sont-ils des espaces euclidiens ?

1. $E=\mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P,Q)=\sum\limits_{i=0}^{n}P(a_i)\,Q(a_i)$ où les a_i sont $n+1$ réels distincts..

2. $E=\mathbb{R}^2$, $\varphi\big((x,y),(x',y')\big)=axx'+bxy'+cx'y+dyy'$ (discuter selon a,b,c,d).

Exercice 2: (⋆)

Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}_n[X]$: $E=\{P\in\mathbb{R}_n[X]\mid P(0)=P(1)=0\}$.

a) Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$; en donner une base et la dimension.

b) Soit $\varphi : E\times E\to\mathbb{R}$ défini par : $\varphi(P,Q)=-\int_0^1(PQ''+P''Q)$. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

Exercice 3: (⋆⋆)

Soient a un vecteur unitaire d'un espace préhilbertien réel E, k un réel et $\varphi : E\times E\to\mathbb{R}$ l'application déterminée par :

$$\varphi(x,y)=\langle x\,|\,y\rangle+k\,\langle x\,|\,a\rangle\,\langle y\,|\,a\rangle\,.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un produit scalaire.

Exercice 4: (⋆)

a) Montrer que l'application $\varphi : \left\{\begin{array}{lcl}\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (A,B) & \longmapsto & \operatorname{tr}(A^\top B)\end{array}\right.$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et que, pour ce produit scalaire, $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})=\big(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\big)^\perp$.

b) Montrer que : $\forall\,A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \operatorname{tr}(A)\leqslant\sqrt{n}\sqrt{\operatorname{tr}(A^\top A)}$, et préciser les cas d'égalité.

Exercice 5: Polynômes de Tchebychev de 2^{e} espèce (⋆⋆⋆)

a) Montrer que l'application $(P,Q)\mapsto\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b) Montrer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, l'existence d'un polynôme P_n tel que :

$$\forall\,\theta\in\mathbb{R},\ \sin(n+1)\theta=\sin\theta.P_n(\cos\theta).$$

c) Montrer que la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire précédent.

Exercice 6: (⋆)

Montrer que :

$$\forall\,f\in\mathscr{C}^1([a\,;b],\mathbb{R}),\ \left(\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right)\geqslant\left(\frac{f(b)^2-f(a)^2}{2}\right)^2.$$

Cas d'égalité ?

Exercice 7: (⋆)

Soient $x_1,\dots,x_n$ n réels strictement positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geqslant n^2$. Cas d'égalité ?

Exercice 8: (⋆⋆)

1) Soient E et F deux espaces préhilbertiens réels, et $f\colon E \to F$ une application telle que

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall\,(x,y) \in E^2,\ \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|\,.$$

Montrer que f est linéaire.

2) Soit E un espace préhilbertien réel et $f, g\colon E \to E$ deux applications telles que :

$$\forall\,(x,y) \in E^2,\ \langle x \,|\, f(y)\rangle = \langle g(x) \,|\, y\rangle\,.$$

Montrer que f et g sont linéaires.

Exercice 9: (⋆)

Soient p et q deux projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien E.
Montrer que : $p \circ q = 0 \iff q \circ p = 0$.

Exercice 10: (⋆)

Soit a un vecteur unitaire d'un espace vectoriel euclidien E. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère l'endomorphisme :

$$f_\alpha : x \mapsto x + \alpha\,\langle a \,|\, x\rangle\, a\,.$$

a) Préciser la composée $f_\alpha \circ f_\beta$. Quelles sont les f_α bijectives ?

b) Déterminer les éléments propres de f_α.

Exercice 11: (⋆⋆)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comparer d'une part les espaces :

$$\operatorname{Ker} A \text{ et } \operatorname{Ker}(A^\top A)$$

et d'autre part les espaces :

$$\operatorname{Im} A \text{ et } \operatorname{Im}(AA^\top).$$

Exercice 12: (⋆⋆⋆)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \|AX\| \leqslant \|X\|$$

où $\|\,.\,\|$ désigne la norme euclidienne usuelle sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

a) Établir :

$$\forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \left\|A^\top X\right\| \leqslant \|X\|\,.$$

b) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que si $AX = X$ alors $A^\top X = X$.

c) Établir :

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker}(A - I_n) \oplus \operatorname{Im}(A - I_n).$$

Exercice 13:($\star$)

1. Dans $\mathbb{R}^5$ muni de sa structure euclidienne canonique, soit F le sous-espace vectoriel d'équations :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 & = & 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 & = & 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 & = & 0 \end{cases}$$

Déterminer $F^\perp$, puis la matrice de la projection orthogonale sur F.

2. Dans $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique, soit P le sous-espace vectoriel d'équations :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Soit $u = (a, b, c, d)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$. Déterminer en fonction de a, b, c et d la distance de u à P.

Exercice 14: ($\star\star$)

Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note : $f_A : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ S = (s_{ij}) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} - s_{ij})^2 \end{cases}$.

Déterminer le minimum de f_A sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, et la matrice S réalisant ce minimum.

Exercice 15:($\star\star$)

Déterminer $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - ax^3 - bx^2 - cx - d)^2 \, dx$ soit minimum, et calculer ce minimum.

Exercice 16:($\star\star$)

On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire : pour $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} b_i X^i$, $\langle P \mid Q \rangle = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i b_i$.

Soit $H = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$.

Trouver une base orthonormale de H, puis calculer $d(X, H)$.

Exercice 17:($\star\star$)

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Calculer $\displaystyle\min_{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \|AX - B\|$ et déterminer les X réalisant ce minimum ($\|\ \|$ désigne la norme euclidienne canonique dans $\mathbb{R}^4$).

Exercice 18:($\star\star\star$)

Soit E un espace préhilbertien réel, et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs *unitaires* vérifiant

$$\forall x \in E \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i \mid x \rangle^2.$$

Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée. (*Attention* : on ne suppose rien sur la dimension de E a priori)

$\star \quad \star \quad \star \quad \star$

$\star \quad \star \quad \star$

$\star \quad \star$

$\star$