EXERCICES : DÉRIVABILITÉ, AVEC CORRIGÉS

Fonctions dérivables (ex. 1 à 6)

Exercice 1: (⋆)

Déterminer toutes les fonctions f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y)=f(x)f(y)\,.$$

✎ *Solution:*

$(f(0)^2=f(0)$ donc $f(0)=0$ ou $f(0)=1$. Si $f(0)=0$ alors f est la fonction nulle.
Sinon, en dérivant par rapport à y puis en faisant $y=0$ on obtient $f'(x)=af(x)$ avec $a=f'(0)$ d'où $f(x)=\mathrm{e}^{ax}$ (réciproque immédiate).

Exercice 2: (⋆)

Soit $f:[a\,;b]\to\mathbb{R}$, dérivable, telle que $f(a)=0$. On suppose qu'il existe $k\geqslant 0$ tel que :

$$\forall\,x\in[a\,;b]\ ,\ |f'(x)|\leqslant k|f(x)|.$$

Montrer que $f=0$.

Indication : on pourra considérer la fonction $g\colon x\mapsto \big(f(x)\big)^2e^{-2kx}$.

✎ *Solution:*

f étant dérivable sur $[a\,;b]$ il en est de même de g, et

$$\forall\,x\in[a\,;b],\ g'(x)=2f(x)\big(f'(x)-kf(x)\big)\mathrm{e}^{-2kx}.$$

Considérons, pour un $x\in[a\,;b]$, deux cas :

- si $f(x)\geqslant 0$, l'inégalité de l'énoncé devient $|f'(x)|\leqslant kf(x)$ donc en particulier $f'(x)-kf(x)\leqslant 0$ d'où $g'(x)\leqslant 0$;
- si $f(x)\leqslant 0$, l'inégalité de l'énoncé devient $|f'(x)|\leqslant -kf(x)$ soit $kf(x)\leqslant f'(x)\leqslant -kf(x)$ donc en particulier $f'(x)-kf(x)\geqslant 0$ d'où encore $g'(x)\leqslant 0$.

g' est donc toujours négative, donc g est décroissante ; puisque $g(a)=0$ on en déduit $g(x)\leqslant 0$ pour tout x, donc $\big(f(x)\big)^2\leqslant 0$ et finalement $f=0$.

Exercice 3: (⋆⋆)

Trouver toutes les fonctions $f\colon[0\,;1]\to[0\,;1]$, dérivables, telles que $f\circ f=f$.

Indication : si f n'est pas constante, soit $[a\,;b]=f([0\,;1])$. Montrer que pour tout $x\in[a\,;b]$, $f(x)=x$, puis en raisonnant par l'absurde, montrer que $a=0$ et $b=1$.

✎ *Solution:*

Les fonctions constantes répondent bien sûr au problème.

Si f est une solution non constante, soit $[a\,;b]=f([0\,;1])$ (avec $a<b$ puisque f non constante). Alors pour tout $x\in[a\,;b]$ il existe $y\in[0\,;1]$ tel que $x=f(y)$ d'où $f(x)=f\circ f(y)=f(y)=x$.
Si jamais a était strictement positif, puisque a est un minimum de f atteint en un point intérieur, on a $f'(a)=0$; mais puisque $f(x)=x$ sur $[a\,;b]$, on devrait avoir $f'_d(a)=1$: contradiction.
Ainsi $a=0$, et de la même façon, $b=1$, d'où $f(x)=x$ sur $[0\,;1]$.

En résumé, les solutions au problème sont les applications constantes et l'application $x\mapsto x$.

Exercice 4: (⋆⋆)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable en 0, et telle que $f(0) = 0$. Déterminer :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} f\left(\frac{1}{k}\right).$$

Applications :

a) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(\sum\limits_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}} \right) - n \right)$.

b) Donner un équivalent quand n tend vers $+\infty$ de $\prod\limits_{k=1}^{n} (n^2 + k)$.

✎ *Solution:*

a) Le développement limité de f en 0 à l'ordre 1 s'écrit

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x) = xf'(0) + x\varepsilon(x)\,,$$

où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. En posant $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ on aura donc

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} f'(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} \varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{n^2} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k}_{=\frac{n(n+1)}{2}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} \varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)}_{=v_n}$$

avec

$$|v_n| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} \left|\varepsilon\left(\frac{k}{n^2}\right)\right| \leqslant \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} k}{n^2} \|\varepsilon\|_{\infty}^{\left[0;\frac{1}{n}\right]} = \frac{n+1}{2n} \|\varepsilon\|_{\infty}^{\left[0;\frac{1}{n}\right]}.$$

Puisque $\lim\limits_{0} \varepsilon = 0$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\varepsilon\|_{\infty}^{\left[0;\frac{1}{n}\right]} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{f'(0)}{2}$.

b) – Un résultat préliminaire :

Posons $x_n = \sum\limits_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ on a pour tout $k \geqslant 2$:

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}\,,$$

d'où :

$$\forall\, k \geqslant 2,\ \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)\,.$$

(cette inégalité peut aussi s'obtenir à l'aide du théorème des accroissements finis). En additionnant ces inégalités pour $k \in [n\,;2n]$ pour $n \geqslant 2$ on obtient après télescopage :

$$\ln(2n+1) - \ln(n) \leqslant x_n \leqslant \ln(2n) - \ln(n-1)$$

et d'après le théorème des gendarmes on en tire : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \ln 2$ (résultat à retenir !)

– En posant $u_n = \sum\limits_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$ on aura, avec les mêmes notations que dans la question précédente :

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{f'(0)}{k} + \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \varepsilon\left(\frac{1}{k}\right)$$

et par une technique similaire à celle de la question précédente et en utilisant les résultats préliminaires, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = f'(0)\ln 2$.

c) $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}} \right) - n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(e^{\frac{1}{n+k}} - 1\right) = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} f\left(\frac{1}{k}\right)$ avec $f(x) = \mathrm{e}^x - 1$.

On applique alors le résultat de la question **b)** (dont les hypothèses sont bien vérifiées) : la limite cherchée vaut $f'(0)\ln 2 = \ln 2$.

d) Posons $u_n = \prod\limits_{k=1}^{n} (n^2 + k)$. Alors $u_n = n^{2n} v_n$ où $v_n = \prod\limits_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

On a alors $\ln(v_n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ donc en appliquant le résultat de la question **a)** à $f\colon x \mapsto \ln(1+x)$ on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(v_n) = \frac{f'(0)}{2} = \frac{1}{2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \sqrt{\mathrm{e}}$ et enfin $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\mathrm{e}}\, n^{2n}$.

Exercice 5: (⋆⋆⋆)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue en 0, telle que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(kx)-f(x)}{x} = \ell$, où k est un réel appartenant à $]0,1[$.
Montrer que f est dérivable en 0, et calculer $f'(0)$ en fonction de ℓ et k.
Traiter le cas $k > 1$.

✎ *Solution:*

L'hypothèse de l'énoncé peut aussi s'écrire :

$$f(kx) - f(x) = \ell x + x\varphi(x)$$

où $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = 0$. Soit donc $\varepsilon > 0$; il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in [-\alpha\,;\alpha]$, $|\varphi(x)| < \varepsilon$ (définition de la limite).
En appliquant l'égalité précédente à $k^{i-1}x$, on a pour tout entier $i \in \mathbb{N}^*$: $f(k^i x) - f(k^{i-1}x) = \ell k^{i-1}x + k^{i-1}x\varphi(k^{i-1}x)$ d'où en sommant, pour $n \in \mathbb{N}^*$, après télescopage :

$$f(k^n x) - f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} k^{i-1}\right)\ell x + \sum_{i=1}^{n} k^{i-1}x\varphi(k^{i-1}x).$$

Puisque $k \in]0\,;1[$ la série $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} k^i$ converge, et a pour somme $\frac{1}{1-k}$ donc :

$$f(k^n x) - f(x) - \frac{\ell x}{1-k} = \left(-\sum_{i=n+1}^{+\infty} k^{i-1}\right)\ell x + \sum_{i=1}^{n} k^{i-1}x\varphi(k^{i-1}x).$$

Soit maintenant $x \in [-\alpha\,;\alpha]$. Puisque $k < 1$ on a $k^i x \in [-\alpha\,;\alpha]$ pour tout entier i donc

$$\begin{aligned}\left|f(k^n x) - f(x) - \frac{\ell x}{1-k}\right| &\leqslant \left(\sum_{i=n+1}^{+\infty} k^{i-1}\right)|\ell x| + \sum_{i=1}^{n} k^{i-1}|x|\left|\varphi(k^{i-1}x)\right| \\ &\leqslant \frac{k^n}{1-k}|\ell x| + \varepsilon\sum_{i=1}^{n} k^{i-1}|x| \\ &\leqslant \frac{k^n}{1-k}|\ell x| + \varepsilon\sum_{i=1}^{+\infty} k^{i-1}|x| = \frac{k^n|\ell| + \varepsilon}{1-k}|x|.\end{aligned}$$

Puisque $k \in]0\,;1[$ et que f est continue en 0, on peut trouver N tel que pour $n > N$ on ait

$$|f(k^n x) - f(0)| < \varepsilon|x| \quad \text{et} \quad k^n|l| < \epsilon$$

ce qui conduit finalement, après utilisation de l'inégalité triangulaire, à :

$$\left|f(0) - f(x) - \frac{\ell x}{1-k}\right| \leqslant \left(\varepsilon + \frac{2\varepsilon}{1-k}\right)|x|$$

Ainsi, $f(x) - f(0) - \dfrac{\ell}{k-1}x \underset{x\to 0}{=} o(x)$, ce qui signifie que f est dérivable en 0, de dérivée $\dfrac{\ell}{k-1}$.
Si $k > 1$, faire la même chose avec x et $\frac{x}{k}$ au lieu de kx et x....

Exercice 6: (⋆⋆)

Soit $M\colon \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, M(t)^\top M(t) = I_n\,.$$

Montrer que, pour tout réel t, la matrice $M'(t)$ n'est pas inversible.

✎ *Solution:*

D'après le cours, les applications $t \mapsto M(t)^\top$ puis $t \mapsto M(t)^\top M(t)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (théorèmes à citer précisément) et :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ (M^\top M)'(t) = M'(t)^\top M(t) + M(t)^\top M'(t) = 0\,.$$

Donc pour tout t, $M'(t)^\top M(t) - M^\top(t)M'(t)$ d'où en prenant le déterminant :

$$\det(M'(t))\det(M(t)) = (-1)^{2n+1}\det(M(t))\det(M'(t)) = -\det(M(t))\det(M'(t)),$$

donc $\det(M(t))\det(M'(t)) = 0$. Comme $M(t)$ est inversible (d'inverse $M(t)^\top$) son déterminant est non nul d'où $\det(M'(t)) = 0$.

Dérivées successives (ex. 7 à 9)

Exercice 7: (⋆)

Calculer la dérivée n-ième en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}$.

✎ *Solution:*

Déjà on remarque que : $x^2 - 2x\cos\alpha + 1 = (x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})(x - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha})$ (identité remarquable à connaître !).

• Si $\alpha = 0$ (modulo 2π) on a $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ donc f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et on a facilement par récurrence :

$$\forall x \neq 1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(n+1)!}{(x-1)^{n+2}}\,.$$

• Calcul similaire lorsque $\alpha = \pi$ modulo 2π...

• Supposons donc désormais $\alpha \neq 0$ modulo π ; ainsi $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \neq \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle f s'écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{(x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})(x - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha})} = \frac{\lambda}{x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} + \frac{\mu}{x - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}\,.$$

En multipliant cette relation par $x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{x - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}} = \lambda + \mu\frac{x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{x - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}\,,$$

puis en prenant $x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ dans cette relation (il s'agit d'une égalité polynomiale vraie sur $\mathbb{R}$ donc aussi sur $\mathbb{C}$), on obtient :

$$\lambda = \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}} = \frac{1}{2\mathrm{i}\sin\alpha} = -\frac{\mathrm{i}}{2\sin\alpha}\,.$$

De la même façon on trouve $\mu = \overline{\lambda}$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\lambda}{x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} + \dfrac{\overline{\lambda}}{x - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}$ d'où facilement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \lambda\frac{(-1)^n n!}{(x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})^{n+1}} + \overline{\lambda}\frac{(-1)^n n!}{(x - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha})^{n+1}}\,.$$

En particulier :

$$f^{(n)}(0) = -n!\mathcal{R}e\left(\frac{\lambda}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\alpha}}\right) = \frac{n!\,\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}\,.$$

Exercice 8: (⋆⋆)

Montrer que, si $f_n(x) = x^{n-1}\ln(1+x)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, alors : $f_n^{(n)}(x) = (n-1)!\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+x)^k}$.

✎ *Solution:*

On remarque déjà que, par les théorèmes usuels, f_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;+\infty[$.
On procède par récurrence sur n pour montrer l'égalité.

- Pour $n = 1$, $f_1(x) = \ln(1+x)$ donc $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ et l'égalité proposée est vérifiée.
- Supposons les résultat acquis à l'ordre n. On a alors, pour tout $x > -1$, $f_{n+1}(x) = xf_n(x)$ d'où en dérivant cette égalité à l'aide de la formule de Leibniz, puisque toutes les dérivées d'ordre $\geqslant 2$ de $x \mapsto x$ sont nulles :

  $$f_{n+1}^{(n+1)}(x) = xf_n^{(n+1)}(x) + (n+1)f_n^{(n)}(x)$$

  et en utilisant l'hypothèse de récurrence :

  $$f_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n-1)!\left((n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+x)^k} - x\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(1+x)^{k+1}}\right).$$

En écrivant $x = (1+x) - 1$ (astuce à retenir !) :

$$\begin{aligned} f_{n+1}^{(n+1)}(x) &= (n-1)!\left((n+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+x)^k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(1+x)^k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(1+x)^{k+1}}\right) \\ &= (n-1)!\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{n+1-k}{(1+x)^k} + \sum_{\cancel{k=1}\ k=2}^{n}\frac{k-1}{(1+x)^k} + \frac{n}{(1+x)^{n+1}}\right) \\ &= (n-1)!\sum_{k=1}^{n+1}\frac{n}{(1+x)^k} = n!\sum_{k=1}^{1}\frac{n}{(1+x)^k}, \end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu à l'ordre $n+1$, et achève la récurrence.

Exercice 9: (⋆⋆)

Soit $f(x) = e^{-x^2}$.

a) Montrer que $f^{(n)}(x) = e^{-x^2}P_n(x)$, où P_n est un polynôme de degré n.

b) En remarquant $f'(x) = -2xf(x)$, établir que :

$$\forall\, n \geqslant 1\ ,\ P_{n+1}(x) = -2xP_n(x) - 2nP_{n-1}(x) \ \text{ et } \ P_n'(x) = -2nP_{n-1}(x).$$

c) En déduire une équation différentielle du second ordre vérifiée par P_n, puis (⋆⋆⋆) une expression de P_n.

✎ *Solution:*

On note déjà que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme composée de telles fonctions, donc toutes les dérivations qui vont suivre ne posent pas de problème.

a) Récurrence facile :

- La propriété est vraie pour $n = 0$, avec $P_0 = 1$;
- Si elle est vraie à l'ordre n on obtient alors en dérivant :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f^{(n+1)}(x) = \big(-2xP_n(x) + P_n'(x)\big)\mathrm{e}^{-x^2},$$

d'où la propriété à l'ordre $n+1$ en posant $P_{n+1}(x) = -2xP_n(x) + P_n'(x)$ $\quad(*)$: P_{n+1} est bien un polynôme de degré $n+1$, et cette relation de récurrence permet également de montrer que le coefficient dominant de P_n est égal à $(-2)^n$.

b) La relation $f'(x) = -2xf(x)$ est immédiate ; en la dérivant n fois à l'aide de la formule de Leibniz, on obtient, puisque toutes les dérivées d'ordre $\geqslant 2$ de $x \mapsto x$ sont nulles :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ f^{(n+1)}(x) = -2xf^{(n)}(x) - 2nf^{(n-1)}(x)$$

d'où :

$$P_{n+1}(x) = -2xP_n(x) - 2nP_{n-1}(x).$$

C'est la relation demandée, et en combinant avec la relation $(*)$ on en déduit $P_n'(x) = -2nP_{n-1}(x)$.

c) • Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. D'après la relation précédente on a : $P_n''(x) = -2nP_{n-1}'(x)$; la relation $(*)$ écrite à l'ordre $n-1$ donne aussi : $P_n(x) = -2xP_{n-1}(x) + P_{n-1}'(x)$ donc

$$P_n''(x) = -2n\big(P_n(x) + 2xP_{n-1}(x)\big) = -2nP_n(x) + 2x(-2nP_{n-1}(x)) = -2nP_n(x) + 2xP_n'(x)$$

L'équation différentielle cherchée est donc :

$$P_n''(x) - 2xP_n'(x) + 2nP_n(x) = 0.$$

(cette relation est vraie a priori pour $n \geqslant 1$ compte tenu de la façon dont elle a été obtenue, mais elle reste vraie pour $n = 0$ puisque $P_0 = 1$).

• On sait que P_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-2)^n$; de plus, la relation de récurrence $P_{n+1}(x) = -2xP_n(x) + P_n'(x)$ ainsi que le calcul de $P_0 = 1$ et $P_1(x) = -2x$ permet de montrer facilement que P_n est de la parité de n.

On peut donc écrire : $P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} a_{n-2k}x^{n-2k}$ avec $a_n = (-2)^n$. En « injectant » dans l'équation différentielle on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor-1}(n-2k)(n-2k-1)a_{n-2k}\,x^{n-2k-2} - 2x\left(\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(n-2k)a_{n-2k}\,x^{n-2k-1}\right) + 2n\left(\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}a_{n-2k}\,x^{n-2k}\right) = 0$$

En regroupant les deux dernières sommes :

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor-1}(n-2k)(n-2k-1)a_{n-2k}\,x^{n-2k-2}+\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-2(n-2k)a_{n-2k}+2na_{n-2k})\,x^{n-2k}=0.$$

En faisant maintenant un changement d'indice ($k'=k+1$) dans la première somme :

$$\sum_{k=1}^{\lfloor n/2\rfloor}(n-2k+2)(n-2k+1)a_{n-2k+2}\,x^{n-2k}+\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}4ka_{n-2k}\,x^{n-2k}=0.$$

Puisqu'un polynôme est nul pour tout x si et seulement si c'est le polynôme nul c'est-à-dire si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, on en déduit :

$$\forall\, k\in[\![1\,;\lfloor n/2\rfloor]\!],\ 4ka_{n-2k}+(n-2k+2)(n-2k+1)a_{n-2k+2}=0.$$

La relation précédente s'écrit, pour $k=1$:

$$a_{n-2}=-\frac{n(n-1)}{4}a_n\,,$$

puis pour $k=2$:

$$a_{n-4}=-\frac{(n-2)(n-3)}{4.2}a_{n-2}=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4^2.2.1}a_n$$

puis pour $k=3$:

$$a_{n-6}=-\frac{(n-4)(n-5)}{4.3}=-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{4^3.3.2.1}a_n$$

et l'on démontre alors par une récurrence élémentaire que :

$$\forall\, k\in[\![1\,;\lfloor n/2\rfloor]\!],\ a_{n-2k}=(-1)^k\frac{n!}{4^k(n-2k)!k!}a_n \text{ avec } a_n=(-2)^n,$$

et finalement l'expression de P_n :

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\ P_n(x)=(-2)^n\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}(-1)^k\frac{n!}{4^k(n-2k)!k!}x^{n-2k}.$$

Cette superbe formule a été vérifiée par le logiciel MAPLE pour $n\leqslant 5$....

Th. de Rolle. Th. des accroissements finis. Formule de Taylor-Young (ex. 10 à 19)

Exercice 10: Th. de Rolle généralisé (⋆)

Soit f continue sur $[a\,;+\infty[$, dérivable sur $]a\,;+\infty[$, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ existe et est égale à $f(a)$.

Montrer qu'il existe $c\in]a\,;+\infty[$ tel que $f'(c)=0$.

(Indication : considérer la fonction g définie sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=f(a+\tan x)$).

✎ *Solution:*

g se prolonge en une fonction continue sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et on lui applique le théorème de Rolle.

Exercice 11: (⋆)

En utilisant le théorème des accroissements finis, calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}}\right)$.

Donnez une autre méthode pour calculer cette limite.

✎ *Solution:*

On peut appliquer le théorème des accroissements finis à $f\colon x\mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, entre x et $x+1$:

$$\exists\, c_x\in]x\,;x+1[,\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}}=[x-(x+1)]f'(c_x)=\frac{1}{c_x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{c_x}}\,.$$

Or $c_x\in]x\,;x+1[$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{c_x^2}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{1}{c_x}}=1$ donc la limite demandée est égale à 1.

Autre méthode : On peut écrire :

$$x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}}\right)=x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}-1\right)$$

et puisque : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} = 1$, que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1}\right) = 0$ et que $\mathrm{e}^X - 1 \underset{X\to 0}{\sim} X$ on en déduit l'équivalent :

$$x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{x}{x+1}$$

et on retrouve le résultat précédent.

Exercice 12: (⋆)

Soit f dérivable sur $[0\,;1]$ telle que : $f(0) = 0$ et $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in [0\,;1]$.
Montrer que f garde un signe constant sur $[0\,;1]$. (*Rem :* on ne suppose pas nécessairement f' continue).

✎ *Solution:*

f étant dérivable sur $[0\,;1]$, elle y est continue ; donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, si, par l'absurde, elle ne gardait pas un signe constant, il existerait x et y dans $]0\,;1]$ (0 est exclu) tels que $f(x) > 0$ et $f(y) < 0$ donc f s'annulerait en un certain point $c \in]0\,;1]$. Puisque $f(0) = f(c) = 0$, le théorème de Rolle donne alors l'existence de d tel que $f'(d) = 0$, c'est contradictoire.

Exercice 13: (⋆)

Soit f dérivable sur $\mathbb{R}_+$. On suppose f' croissante et on pose $g(x) = xf'(x) - f(x)$.
Montrer que g est croissante.

✎ *Solution:*

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $0 \leqslant x \leqslant y$. Alors :

$$g(y) - g(x) = yf'(y) - f(y) - xf'(x) + f(x) = x\big(f'(y) - f'(x)\big) + (y-x)f'(y) - f(y) + f(x).$$

Or d'après le théorème des accroissements finis il existe $c \in]x\,;y[$ tel que $f(y) - f(x) = (y-x)f'(c)$ donc :

$$g(y) - g(x) = x\big(f'(y) - f'(x)\big) + (y-x)\big(f'(y) - f'(c)\big).$$

f' étant croissante par hypothèse, on a $f'(y) - f'(x) \geqslant 0$ et $f'(y) - f'(c) \geqslant 0$, et on a aussi $x \geqslant 0$ et $y - x \geqslant 0$ donc $g(y) \geqslant g(x)$ c'est-à-dire g croissante.

Exercice 14: (⋆⋆)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que, si, P est scindé sur $\mathbb{R}$, il en est de même de P'.

✎ *Solution:*

Soit P un polynôme scindé de $\mathbb{R}[X]$, de degré $n \geqslant 1$. On rappelle qu'un polynôme non constant est dit scindé dans $\mathbb{R}[X]$ si toutes ses racines sont réelles, ce qui équivaut à dire qu'il s'écrit sous la forme

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{p} (X - a_i)^{\alpha_i}$$

les a_i étant les réels racines de P et les α_i leurs ordres de multiplicité.

Supposons les a_i rang"s par ordre strictement croissants $a_1 < \cdots < a_p$. On peut alors appliquer le théorème de Rolle à la fonction polynôme associée à P (cette fonction étant de classe $\mathscr{C}^\infty$) sur chaque intervalle $[a_i\,;a_{i+1}]$, ce qui donne l'existence de $p-1$ racines distinctes de P'.
De plus, si a_i est une racine d'ordre α_i de P on ait que c'est aussi une racine d'ordre $\alpha_i - 1$ de P' (avec la convention qu'un réel est dit racine d'ordre 0 s'il n'est pas racine !). On a donc ainsi $\sum\limits_{i=1}^{p} (\alpha_i - 1)$ racines de P' (comptées avec leur ordre de multiplicité).
On a donc trouvé

$$(p-1) + \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i - 1) = (p-1) + \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i}_{=n \text{ car } P \text{ scindé}} - p = n - 1$$

racines réelles de P' (comptées avec leur ordre de multiplicité), avec $\deg(P') = n-1$, donc P' est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 15: (⋆⋆⋆)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivable, telle que $\lim\limits_{t\to+\infty} f'(t) = \ell \in \mathbb{R}$.

Montrer que : $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{f(t)}{t} = \ell$. Réciproque ?

✎ *Solution:*

Soit $\varepsilon > 0$ Par définition de la limite :

$$\exists\, A \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall\, t \geqslant A,\ \ell - \varepsilon \leqslant f'(t) \leqslant \ell + \varepsilon.$$

Par le théorème des accroissements finis, pour tout $t > A$, il existe $c \in]A\,;t[$ tel que $f(t) - f(A) = (t-A)f'(c)$ donc, en utilisant l'encadrement précédent :

$$\forall\, t > A,\ \ell - \varepsilon \leqslant \frac{f(t)-f(A)}{t-A} \leqslant \ell + \varepsilon.$$

En écrivant alors $\frac{f(t)}{t} = \frac{f(t)-f(A)}{t} + \frac{f(A)}{t} = \frac{f(t)-f(A)}{t-A}\ \frac{t-A}{t} + \frac{f(A)}{t}$, on obtient :

$$\forall\, t > A,\ \frac{f(A)}{t} + (\ell-\varepsilon)\frac{t-A}{t} \leqslant \frac{f(t)}{t} \leqslant \frac{f(A)}{t} + (\ell+\varepsilon)\frac{t-A}{t}\,.$$

Or $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(\frac{f(A)}{t} + (\ell-\varepsilon)\frac{t-A}{t}\right) = \ell - \varepsilon$ donc pour t assez grand on aura $\frac{f(A)}{t} + (\ell-\varepsilon)\frac{t-A}{t} \geqslant \ell - 2\varepsilon$;
de même, $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(\frac{f(A)}{t} + (\ell+\varepsilon)\frac{t-A}{t}\right) = \ell + \varepsilon$ donc pour t assez grand, on aura $\frac{f(A)}{t} + (\ell+\varepsilon)\frac{t-A}{t} \leqslant \ell + 2\varepsilon$.
Finalement, pour t assez grand on aura :

$$\ell - 2\varepsilon \leqslant \frac{f(t)}{t} \leqslant \ell + 2\epsilon$$

de qui est exactement la définition de $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t} = \ell$.

Rem : ce résultat n'admet pas de réciproque ; considérer par exemple la fonction $f : t \mapsto \sin t$.

Exercice 16: (⋆⋆⋆)

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, telle que $\lim\limits_{t\to+\infty} \big(f(t) + f'(t)\big) = \ell$.

Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \ell$ (on pourra s'inspirer des méthodes de résolution d'une équation différentielle du premier ordre).

✎ *Solution:*

Déjà, quitte à remplacer f par $f - \ell$, on peut se contenter de traiter le cas $\ell = 0$.
Posons $g(t) = f(t) + f'(t)$, et supposons donc que $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$. En écrivant $f(t) = C(t)\mathrm{e}^{-t}$ (méthode de variation de la constante), on obtient

$$\forall\, t \in \mathbb{R}_+,\ f(t) = \mathrm{e}^{-t}\int_0^t \mathrm{e}^u g(u)\,\mathrm{d}u + C\mathrm{e}^{-t}$$

où C est une constante. Pour démontrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$, il suffit donc de monter que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t}\int_0^t \mathrm{e}^u g(u)\,\mathrm{d}u = 0$.
Soit donc $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite :

$$\exists\, A > 0 \text{ tel que } \forall\, u \geqslant A,\ |g(u)| < \varepsilon.$$

Donc, pour $t > A$:

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{e}^{-t}\int_0^t \mathrm{e}^u g(u)\,\mathrm{d}u\right| &= \left|\mathrm{e}^{-t}\int_0^A \mathrm{e}^u g(u)\,\mathrm{d}u + \mathrm{e}^{-t}\int_A^t \mathrm{e}^u g(u)\,\mathrm{d}u\right| \\
&\leqslant \mathrm{e}^{-t}\int_0^A \mathrm{e}^u\,|g(u)|\,\mathrm{d}u + \mathrm{e}^{-t}\int_A^t \mathrm{e}^u\,|g(u)|\,\mathrm{d}u \\
&\leqslant \mathrm{e}^{-t}\int_0^A \mathrm{e}^u\,|g(u)|\,\mathrm{d}u + \varepsilon\mathrm{e}^{-t}\int_A^t \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u \\
&\leqslant \mathrm{e}^{-t}\int_0^A \mathrm{e}^u\,|g(u)|\,\mathrm{d}u + \varepsilon\mathrm{e}^{-t}(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^A) \leqslant \mathrm{e}^{-t}\int_0^A \mathrm{e}^u\,|g(u)|\,\mathrm{d}u + \varepsilon.
\end{aligned}$$

D'autre part, A étant fixé, $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t}\int_0^A \mathrm{e}^u\,|g(u)|\,\mathrm{d}u = 0$ donc il existe $B > A$ tel que, pour $t > B$ on ait $\mathrm{e}^{-t}\int_0^A \mathrm{e}^u\,|g(u)|\,\mathrm{d}u < \varepsilon$.

Finalement, pour $t > B$ on a $\left|\mathrm{e}^{-t}\int_0^t \mathrm{e}^u g(u)\,\mathrm{d}u\right| < 2\varepsilon$, ce qui signifie, par définition de la limite, que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t}\int_0^t \mathrm{e}^u g(u)\,\mathrm{d}u = 0$, cqfd.

Exercice 17: ***Formule des trapèzes*** **(⋆⋆)**

Soit f de classe $\mathscr{C}^3$ sur $[a\,;b]$, à valeurs réelles. Montrer qu'il existe $c \in]a\,;b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}\big(f'(a)+f'(b)\big) - \frac{(b-a)^3}{12}f^{(3)}(c).$$

Indication : considérer la fonction $g\colon x \mapsto f(x) - f(a) - \dfrac{x-a}{2}(f'(a)+f'(x)) + \lambda\dfrac{(x-a)^3}{12}$, où λ est un réel bien choisi.

✎ *Solution:*

On choisit λ tel que $g(\lambda) = 0$ (ce qui est possible car cela équivaut à une équation de la forme $\lambda\frac{(b-a)^3}{12} = \cdots$ qui a bien une solution puisque $b-a \neq 0$).

Alors g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a\,;b]$, $g(a) = g(b) = 0$, puis en appliquant deux fois le théorème de Rolle on obtient l'existence de $c \in]a\,;b[$ tel que $g''(c) = 0$ ce qui après calculs donne le résultat.

Exercice 18: **(⋆⋆)**

Soit f de classe $\mathscr{C}^5$ sur $[a\,;b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c \in]a\,;b[$ tel que :

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}\big(f'(a)+f'(b)\big) - \frac{(b-a)^2}{12}\big(f''(b)-f''(a)\big) + \frac{(b-a)^5}{720}f^{(5)}(c).$$

✎ *Solution:*

Soit λ tel que

$$f(b) - f(a) - \frac{b-a}{2}\big(f'(a)+f'(b)\big) + \frac{(b-a)^2}{12}\big(f''(b)-f''(a)\big) = \lambda\frac{(b-a)^5}{720}$$

(λ existe puisque $b-a \neq 0$).

On considère alors la fonction

$$g\colon x \mapsto f(x) - f(a) - \frac{x-a}{2}\big(f'(x)+f'(a)\big) + \frac{(x-a)^2}{12}\big(f''(x)-f''(a)\big) - \lambda\frac{(x-a)^5}{720}\cdot$$

g est dérivable sur $[a\,;b]$ et $g(a) = g(b) = 0$ (par le choix de λ) donc il existe $d \in]a\,;b[$ tel que $g'(d) = 0$. Or :

$$g'(x) = \frac{1}{2}(f'(x)-f'(a)) - \frac{x-a}{2}f''(x) + \frac{x-a}{6}(f''(x)-f''(a) + \frac{(x-a)^2}{12}f'''(x) - \lambda\frac{(x-a)^4}{144}\cdot$$

On constate que $g'(a) = 0 = g'(d)$, et puisque g' est dérivable on peut lui appliquer le théorème de Rolle : il existe $e \in]a\,;d[$ (donc $e \in]a\,;b[$) tel que $g''(e) = 0$. Or :

$$g''(x) = \frac{1}{6}(f''(x)-f''(a)) - \frac{x-a}{6}f'''(x) + \frac{(x-a)^2}{12}f^{(4)}(x) - \lambda\frac{(x-a)^3}{36}\cdot$$

On constate que $g''(a) = 0 = g''(e)$, et puisque g'' est dérivable on peut lui appliquer le théorème de Rolle : il existe $c \in]a\,;e[$ (donc $c \in]a\,;b[$) tel que $g'''(c) = 0$. Or :

$$g'''(x) = \frac{(x-a)^2}{12}f^{(5)}(x) - \lambda\frac{(x-a)^2}{12}$$

don en écrivant $g'''(c) = 0$ et en divisant par $\dfrac{(c-a)^2}{12}$ (qui n'est pas nul !), on obtient $\lambda = f^{(5)}(c)$ d'où le résultat.

Exercice 19: (⋆⋆)

Soient n réels $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ et f de classe $\mathscr{C}^n$ sur $[a_1\,;a_n]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que $f(a_i) = 0$ pour tout i.

Montrer que, pour tout $x \in [a_1\,;a_n]$, il existe $c \in]a_1\,;a_n[$ tel que :

$$f(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{n!} f^{(n)}(c).$$

Indication : considérer $g\colon t \mapsto f(t) - \lambda(t-a_1)(t-a_2)\ldots(t-a_n)$ où λ est choisie telle que $g(x) = 0$ lorsque cela est possible.

✎ *Solution:*

- Si x est égal à l'un des a_i le résultat est vrai en prenant c quelconque dans $]a_1\,;a_n[$ (tout est nul).
- Sinon, on peut poser

$$\lambda = \frac{f(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}$$

et on considère alors la fonction g définie sur $[a_1\,;a_n]$ par

$$g(t) = f(t) - \lambda(t-a_1)(t-a_2)\ldots(t-a_n).$$

Alors g est de classe $\mathscr{C}^n$ et s'annule en $n+1$ points distincts (les a_i et x). En appliquant alors le théorème de Rolle de façon itérée à g, puis g' puis g'' etc on obtient qu'il existe c tel que $g^{(n)}(c) = 0$.

Or la dérivée n-ième de la fonction polynôme de degré n $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$ est égale à $n!$ donc $g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - n!$ et l'égalité $g^{(n)}(c) = 0$ donne $\lambda = f^{(n)}(c)$, cqfd.