EXERCICES : SÉRIES ENTIÈRES, AVEC CORRIGÉS

Rayon de convergence (ex. 1 à 6)

Exercice 1: ($\star$)

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ dans les cas suivants :

a) $a_n = \sqrt[n]{n}$ **b)** $a_n = \dfrac{n^n}{n!}$ **c)** $a_n = \dfrac{\sin n}{n}$ **d)** $a_n = \arctan\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

e) $a_n = \dbinom{2n}{n}$ **f)** $\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}$ **g)** $a_n = \tan\left(\dfrac{n\pi}{7}\right)$ **h)** $a_n =$ somme des diviseurs de n

i) a_n vérifie : $a_{2p} = 0$ et $a_{2p+1} = \dfrac{(-1)^p}{\mathrm{ch}(p)}$

j) a_n vérifie : $a_{3p} = \dfrac{1}{p^2+1}$, $a_{3p+1} = \dfrac{1}{p!}$, $a_{3p+2} = a^p$ $(a \in \mathbb{R}_+^*)$

✎ *Solution:*

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$ donc la suite $(a_n z^n)$ est bornée si et seulement si $|z| \leqslant 1$.
Par définition on en déduit $R = 1$.

b) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. $\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n |z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}\,|z|$ donc, d'après la règle de d'Alembert pour les séries à termes réels positifs on a :
- si $\mathrm{e}\,|z| < 1$ la série $\sum |a_n z^n|$ converge ;
- si $\mathrm{e}\,|z| > 1$ cette série diverge.

Par conséquent, $R = \frac{1}{\mathrm{e}}$ ·

c) Si $|z| \leqslant 1$ la suite $(a_n z^n)$ est bornée donc $R \geqslant 1$.
Soit z tel que $|z| > 1$. On peut toujours trouver des entiers n aussi grand que l'on veut tels que $|\sin n| \geqslant \frac{1}{2}$ (il suffit de prendre $n \in \left[\frac{\pi}{6} + k\pi\,;\frac{5\pi}{6} + k\pi\right]$ avec $k \in \mathbb{N}$, ce qui est toujours possible puisque la longueur de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}\right]$ est supérieure à 1). Pour ces n on aura $|a_n z^n| \geqslant \frac{|z|^n}{2n}$, donc par croissances comparées, la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée.
On en déduit $R \leqslant 1$ et finalement, $R = 1$.
Autre solution ; le rayon de convergence de la série $\sum \frac{\sin n}{n} z^n$ est le même que celui de sa série dérivée, donc que celui de la série $\sum \sin n z^n$.
Or on sait que la suite $(\sin n)$ diverge (exercice classique, déjà fait), donc la série diverge pour $z = 1$ d'où $R \leqslant 1$.

d)
- Si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{\pi}{2}$ donc la suite $(a_n z^n)$ est bornée si et seulement si $|z| \leqslant 1$.
  Par définition on en déduit $R = 1$.
- Si $\alpha = 0$, $a_n = \frac{\pi}{4}$ pour tout n donc $R = 1$.
- Si $\alpha > 0$, $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}$ donc la suite $(a_n z^n)$ est bornée si et seulement si la suite $\left(\frac{z^n}{n^\alpha}\right)$ l'est, c'est-à-dire si et seulement si si et seulement si $|z| \leqslant 1$..
  Là encore, on en déduit $R = 1$.

e) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. $\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = \left|\frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} z^{n+1}}{\frac{(2n)!}{n!^2} z^n}\right| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}|z| = \frac{2(2n+1)}{n+1}|z| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4|z|$, donc par application de la règle de d'Alembert pour les séries à termes réels positifs (je ne détaille pas, cf **b)**) on trouve $R = \frac{1}{4}$ ·

f) On cherche un équivalent de a_n :

$$\begin{aligned} a_n &= \mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}\ln(n+1)} - \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(n)} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\ln(n)}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}\ln(n+1) - \frac{1}{n}\ln(n)} - 1\right) \end{aligned}$$

donc puisque $\frac{1}{n}\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que $e^X - 1 \underset{X\to 0}{\sim} X$:

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n+1}\ln(n+1) - \frac{1}{n}\ln(n)$$

et

$$\frac{1}{n+1}\ln(n+1)-\frac{1}{n}\ln(n)=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)\ln(n)+\underbrace{\frac{1}{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\sim\frac{1}{n^2}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{\ln(n)}{n^2}.$$

Donc $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n^2}$; il en résulte que la suite (a_nz^n) est bornée si et seulement si $|z|\leqslant 1$, donc $R=1$.

g) La suite (a_n) est périodique et ne prend que 7 valeurs : 0, $\tan\frac{\pi}{7}$, $\tan\frac{2\pi}{7}$ etc...
Donc la suite (a_nz^n) est bornée si et seulement si $|z|\leqslant 1$, et $R=1$.

h) La somme des diviseurs de n est comprise entre 1 et $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, donc le rayon de convergence de la série $\sum a_nz^n$ est compris entre les rayons de convergence des deux séries $\sum z^n$ et $\sum \frac{n(n+1)}{2}z^n$, qui sont tous deux égaux à 1, donc $R=1$.

i) La suite (a_nz^n) est bornée si et seulement si les deux suites $(a_{2p}z^{2p})$ et $(a_{2p+1}z^{2p+1})$ le sont, c'est-à-dire si la suite $\left(\frac{z^{2p}}{\operatorname{ch} p}\right)$ l'est.

Or $\operatorname{ch} p \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{e^p}{2}$, donc cela équivaut à $\left(\frac{z^{2p}}{e^p}\right)$ bornée ; comme il s'agit d'une suite géométrique de raison $\frac{z^2}{e}$, cela équivaut à $|z|^2\leqslant e$, et finalement : $R=\sqrt{e}$.

j) La suite (a_nz^n) est bornée si et seulement si les trois suites $(a_{3p}z^{3p})$, $(a_{3p+1}z^{3p+1})$ et $(a_{3p+2}z^{3p+2})$ le sont. Or :

- $a_{3p}z^{3p}=\frac{z^{3p}}{p^2+1}$ donc la suite $(a_{3p}z^{3p})$ est bornée si et seulement si $|z|\leqslant 1$;
- $a_{3p+1}z^{3p+1}=\frac{z^{3p+1}}{p!}\underset{p\to+\infty}{\longrightarrow}0$ donc la suite $(a_{3p+1}z^{3p+1})$ est toujours bornée ;
- $a_{3p+2}z^{3p+2}=a^pz^{3p+2}$ est le terme général d'une suite géométrique de raison az^3 donc elle est bornée si et seulement si $|az^3|\leqslant 1$ c'est-à-dire si $|z|^3\leqslant\frac{1}{a}$.

En conclusion : $R=\min\left(1,\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)$.

k) L'étude de la suite (a_n) est facile : clairement, a_n est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, et, compte tenu de l'inégalité bien connue $\ln(1+x)\leqslant x$, on a (a_n) décroissante et minorée par 0.
Donc elle converge vers l'unique point fixe de la fonction $x\mapsto\ln(1+x)$ c'est-à-dire 0. La suite étant bornée, on en déduit $R\geqslant 1$.

On a de plus, à l'aide d'un petit développement limité :

$$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n-\frac{a_n^2}{2}+o(a_n^2)}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n}\left(1+a_n+o(a_n)-2\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{2},$$

donc par le théorème de Cesàro (H.P) on obtient $\frac{1}{a_n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n}{2}$ soit $a_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2}{n}$, ce qui montre que $R=1$.

Exercice 2: (⋆)

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_nz^n$ une série entière de rayon de convergence R.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_nz^{2n}$.

✎ *Solution:*

Notons R' le rayon de convergence de $\sum a_nz^{2n}$.

- Pour $|z|<\sqrt{R}$, $|z^2|<R$ et donc $\sum a_n(z^2)^n=\sum a_nz^{2n}$ est absolument convergente. Donc $R'\geqslant|z|$, et cela étant vrai pour tout z tel que $|z|<\sqrt{R}$, on en déduit $R'\geqslant\sqrt{R}$.
- Pour $|z|>\sqrt{R}$, $|z^2|>R$ et donc $\sum a_n(z^2)^n=\sum a_nz^{2n}$ est grossièrement divergente. Donc $R'\leqslant|z|$ et l'on en déduit $R'\leqslant\sqrt{R}$.

Finalement : $R'=\sqrt{R}$.

Exercice 3: (⋆⋆)

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_nz^n$ une série entière de rayon de convergence R. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n^2z^n$.

✎ *Solution:*

Montrons par double inégalité que le rayon de convergence R' de $\sum a_n^2 z^n$ vaut $R' = R^2$.

- Soit $|z| < R$.
  Puisque la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente, on a $a_n z^n \to 0$ et donc $a_n^2 z^{2n} \to 0$.
  On en déduit $|z|^2 \leqslant R'$ et donc $R^2 \leqslant R'$.
- Soit $|z| < \sqrt{R'}$. On a $|z|^2 < R'$ et donc $|a_n^2 z^{2n}| \to 0$ puis $|a_n z^n| \to 0$. On en déduit $|z| \leqslant R$ et donc $\sqrt{R'} \leqslant R$.

Exercice 4: ($\star\star$)

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!} z^n$.

✎ *Solution:*

Soit $r \in]0\,;R[$. La série numérique $\sum a_n r^n$ est absolument convergente. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{a_n}{n!} z^n = a_n r^n \frac{1}{n!}\left(\frac{z}{r}\right)^n = o(a_n r^n)$$

car par croissances comparées $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{z}{r}\right)^n = 0$.

Par comparaison de séries absolument convergentes, on peut affirmer que la série numérique $\sum \frac{a_n z^n}{n!}$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$.
Le rayon de convergence de la série entière étudiée est donc $+\infty$.

Exercice 5: ($\star\star$)

Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

✎ *Solution:*

Posons $b_n = n^\alpha a_n$ et comparons R_a et R_b.
Pour $\alpha = 0$: ok.

Pour $\alpha > 0$: $a_n = o(b_n)$ donc $R_a \geqslant R_b$.
Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_a$, en considérant, $\rho \in]|z|\,;R_a[$:

$$n^\alpha a_n z^n = a_n \rho^n \times n^\alpha \frac{z^n}{\rho^n} = o(a_n \rho^n)$$

donc $\sum b_n z^n$ converge et par suite $R_b \geqslant |z|$. Or ceci pour tout z tel que $|z| < R_a$ donc $R_b \geqslant R_a$. Finalement $R_a = R_b$.
Pour $\alpha < 0$: $a_n = n^{-\alpha} b_n$ et on exploite ce qui précède.

Exercice 6:

Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence 1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{et} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n .$$

Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant g, puis, pour tout $x \in]-1\,;1[$, exprimer $g(x)$ en fonction de $f(x)$.

✎ *Solution:*

a) Notons R le rayon de convergence de la série entière définissant g.
Pour $x \in]0, R[$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} S_n x^n$ est absolument convergente donc la série de terme général

$$a_n x^n = S_n x^n - x S_{n-1} x^{n-1}$$

l'est aussi et donc $x \leqslant 1$. Par suite $R \leqslant 1$.

Pour $x \in]0,1[$, $|S_n x^n| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k||x^k|$. Or $\sum\limits_{k \geqslant 0} a_k x^k$ est absolument convergente donc la suite $(S_n x^n)$ est bornée.
Par suite $x \leqslant R$ et donc $1 \leqslant R$. Finalement $R = 1$.
b) $\forall\, x \in]-1,1\,[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N+1} a_n x^n = \sum_{n=0}^{N+1} S_n x^n - x\sum_{n=1}^{N+1} S_{n-1} x^{n-1} = S_{N+1}x^{N+1} + (1-x)\sum_{n=0}^{N} S_n x^n$
A la limite quand $N \to +\infty$, on obtient $f(x) = (1-x)g(x)$.

Calcul de la somme d'une série entière (ex. 7 à 10)

Exercice 7: ($\star$)

Déterminer le rayon de convergence et la somme S de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n^3x^n$.

✎ *Solution:*

La suite (n^3x^n) est bornée si et seulement si $|x| \leqslant 1$ donc $R = 1$. On se souvient ensuite que, pour tout $x \in]-1\,;1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

donc par dérivation d'une série entière :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} &= \frac{1}{(1-x)^2}\\ \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} &= \frac{2}{(1-x)^3}\\ \sum_{n=3}^{+\infty} n(n-1)(n-2)x^{n-3} &= \frac{6}{(1-x)^4},\end{aligned}$$

ce qui nous incite à décomposer le polynôme X^3 sur la base $1,\ X,\ X(X-1),\ X(X-1)(X-2)$ de $\mathbb{R}_3[X]$, et on trouve

$$X = X + 3X(X-1) + X(X-1)(X-2).$$

On en déduit

$$S(x) = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{6x^2}{(1-x)^3} + \frac{6x^3}{(1-x)^4} = \frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4}.$$

Exercice 8: ($\star$)

Déterminer le rayon de convergence et la somme S de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{n^3}{n!}x^n$.

✎ *Solution:*

On utilise encore $X^3 = X + 3X(X-1) + X(X-1)(X-2)$. On trouve : $S(x) = (x+3x^2+x^3)\,\mathrm{e}^x$.

Exercice 9:

Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_nz^n$ dans les cas suivants :

a) $a_n = n^{(-1)^n}$ **b)** $a_n = \dfrac{2n+1}{2n-1}$ **c)** $a_n = \dfrac{n}{3} - \left[\dfrac{n}{3}\right]$ **d)** $a_n = \dfrac{n^2+4n-1}{n!}$

e) $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ **f)** $a_n = \dfrac{1}{1+2+\ldots+n}$ **g)** $a_n = \sin(n\theta)$ **h)** $a_n = \big(2+(-1)^n\big)^n$

i) $a_n = \dfrac{\sin(n\theta)}{n}$ **j)** $a_n = \dfrac{\cos(n\theta)}{n!}$ **k)** $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$

l) (a_n) vérifie la récurrence : $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$ $((a_0,a_1,a_2) \in \mathbb{R}^3)$

Exercice 10:

Développer en série entière, au voisinage de 0, les fonctions suivantes :

a) $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x^2}$ **c)** $\ln\left(1+\dfrac{x^2}{x+1}\right)$ **e)** $\dfrac{1-x\mathrm{ch}a}{1-2x\mathrm{ch}a+x^2}$

b) $\ln(x^2-5x+6)$ **d)** $e^{-x}\sin x$ **f)** $\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}+x\right)$

Propriétés de la somme d'une série entière (ex. 11 à 14)

Exercice 11: (⋆⋆⋆)

a) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite complexe. On suppose que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n x^n$ a pour rayon de convergence $R>0$. Déterminer alors les rayons de convergence des séries entières

$$\sum_{n\geqslant 1}(a_n\ln n)x^n \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1}\left(a_n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n.$$

b) Donner un équivalent simple de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln(n)\,x^n$ quand $x\to 1^-$.

✎ *Solution:*

a) On sait que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^n$ ont le même rayon de convergence R (notamment car une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence). Puisque $a_n = o(a_n\ln n)$ et $a_n\ln n = o(na_n)$ on peut affirmer par encadrement que la série entière $\sum (a_n\ln n)x^n$ a aussi pour rayon de convergence R. De plus

$$a_n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim a_n\ln n$$

donc la série entière $\sum (a_n\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k})x^n$ a encore pour rayon de convergence R.

b) Notons que $\sum \ln n x^n$ a pour rayon de convergence $R=1$. On sait

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+o(1)$$

donc le terme général

$$\ln n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

est borné par un certain M.
Par suite pour $x\in[0\,;1[$

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(n)x^n-\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}x^n\right|\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}Mx^n=\frac{Mx}{1-x}=O\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

quand $x\to 1^-$
Or par produit de Cauchy

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}x^n=-\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(n)x^n\underset{x\to 1^-}{\sim}-\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

Exercice 12: (⋆⋆)

Pour x réel, on pose : $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.

b) Étudier la convergence de la série entière en 1 et en -1.

c) Établir la continuité de f en -1.

d) Déterminer la limite de f en 1.

✎ *Solution:*

a) Pour $x\neq 0$, posons $u_n=x^n/\sqrt{n}\neq 0$. On a $|u_{n+1}/u_n|\to|x|$ donc $R=1$ d'après la règle de d'Alembert (à détailler).
b) En $x=1$, f n'est pas définie car il y a divergence de la série de Riemann $\sum 1/\sqrt{n}$.

En $x=-1$, f est définie car il y a convergence de la série alternée $\sum(-1)^n/\sqrt{n}$ satisfaisant le critère spécial.
c) Posons $u_n(x)=x^n/\sqrt{n}$ pour $x\in[-1,0]$.
Chaque fonction u_n est continue et la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur [-1, 0] en vertu du critère spécial des séries alternées. On a de plus

$$|R_n(x)|\leqslant|u_{n+1}(x)|=\frac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n+1}}\to 0$$

et il y a donc convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$ sur [-1, 0].
On en déduit que sa somme est continue sur [-1, 0] et donc f est notamment continue en -1.
d) Pour tout $n\geqslant 1$, on a $\sqrt{n}\leqslant n$ donc pour tout $x\in[0,1[$

$$f(x)\geqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)\underset{x\to 1^-}{\longrightarrow}+\infty$$

Donc f tend vers $+\infty$ en 1−

Exercice 13: (⋆⋆⋆)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée et pour $n\in\mathbb{N}$, $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}u_k$.

a) Quels sont les rayons de convergence des séries entières : $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{u_n}{n!}x^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{S_n}{n!}x^n$?

b) On note u et S leurs sommes respectives. Former une relation entre S, S' et u'.

c) On suppose que la suite (S_n) converge vers un réel ℓ. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}S(x)$.

d) Dans cette question, on choisit $u_n=(-1)^n$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}S(x)$.

✎ *Solution:*

a) $\left|\frac{u_n}{n!}\right|\leqslant\frac{\|u\|_\infty}{n!}$ donc le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{u_n}{n!}x^n$ est supérieur à celui de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{\|u\|_\infty}{n!}x^n$.

Or la série entière exponentielle $\sum\frac{x^n}{n!}$ est de rayon de convergence $+\infty$, donc la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{u_n}{n!}x^n$ est aussi de rayon de convergence $+\infty$.

En majorant $|S_n|$ par $n\|u\|_\infty$, on obtient de la même manière que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}\frac{S_n}{n!}x^n$ est aussi de rayon de convergence $+\infty$.

b) Pour $x\in\mathbb{R}$, $S'(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{S_{n+1}}{n!}x^n$ donc $S'(x)-S(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{S_{n+1}-S_n}{n!}x^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{u_{n+1}}{n!}x^n=u'(x)$
c) Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^{-x}S(x)-\ell=\mathrm{e}^{-x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{S_n-\ell}{n!}x^n\right).$$

Soit $\varepsilon>0$; par définition de la limite, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N$, $|S_n-\ell|\leqslant\varepsilon$.
On a alors, pour $x\geqslant 0$, après avoir utilisé l'inégalité triangulaire :

$$|\mathrm{e}^{-x}S(x)-\ell|\leqslant\mathrm{e}^{-x}\left[\left(\sum_{n=0}^{N-1}\frac{|S_n-\ell|}{n!}x^n\right)+\left(\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{\varepsilon}{n!}x^n\right)\right].$$

Or :

$$\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{\varepsilon}{n!}x^n\leqslant\varepsilon\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\varepsilon}{n!}x^n=\varepsilon\mathrm{e}^x$$

et, N étant fixé :

$$\sum_{n=0}^{N-1}\frac{|S_n-\ell|}{n!}x^n\underset{x\to+\infty}{=}o(\mathrm{e}^x),$$

donc pour x assez grand :

$$|\mathrm{e}^{-x}S(x)-\ell|\leqslant\mathrm{e}^{-x}[\varepsilon\mathrm{e}^x+\varepsilon\mathrm{e}^x]=2\varepsilon.$$

Ainsi $\mathrm{e}^{-x}S(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}\ell$.

d) Si $u = (-1)^n$ alors $S_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Par suite $S(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} x^{2p} = \operatorname{ch} x$ et $e^{-x} S(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.

Exercice 14: (⋆⋆⋆)

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$.

a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.

b) Étudier la convergence en $-R$ et en R.

c) Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x \to 1^-$.

d) Montrer que quand $x \to 1^-$: $(1-x)f(x) \to 0$.

✎ *Solution:*

a) Soit $a_n = \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$. Puisque $a_{n+1}/a_n \to 1$, on déduit de la règne de d'Alembert (à détailler) : $R = 1$.

b) La suite (a_n) décroît vers 0 donc par le critère spécial des séries alternées, la série entière converge pour $x = -1$.

Puisque $a_n \sim 1/\sqrt{n}$, par équivalence de séries à termes positifs, la série entière diverge pour $x = 1$.

c) Soit $N \in \mathbb{N}$. Par positivité des termes sommés, on a pour $x \in [0\,;1]$,

$$f(x) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})x^n$$

Puisque $\sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, la série numérique de terme général $\sin(\frac{1}{\sqrt{n}})$ diverge donc :

$$\sum_{n=1}^{N} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

et, par définition de la limite, pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe un rang N tel que :

$$\sum_{n=1}^{N} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) \geqslant M + 1.$$

De plus,

$$\sum_{n=1}^{N} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})x^n \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{N} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

donc par définition de la limite, en rassemblant les résultats précédents, pour $x$dans un voisinage de 1^- :

$$\sum_{n=1}^{N} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})x^n \geqslant M$$

donc

$$f(x) \geqslant M.$$

On peut donc affirmer que :

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$$

d) On a

$$(1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\frac{1}{\sqrt{n}})x^{n+1}$$

et par changement d'indice

$$(1-x)f(x) = \sin(1)x + \sum_{n=2}^{+\infty} [\sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) - \sin(\frac{1}{\sqrt{n-1}})]x^n$$

Puisque, à l'aide d'un petitdéveloppement limité :

$$\sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) - \sin(\frac{1}{\sqrt{n-1}}) = O(\frac{1}{n^{3/2}}),$$

la série entière du second membre est définie et continue en 1 par convergence normale de la série de fonctions associée. On en déduit

$$(1-x)f(x) \underset{x \to 1}{\longrightarrow} \sin(1) + \sum_{n=2}^{+\infty} [\sin(\frac{1}{\sqrt{n}}) - \sin(\frac{1}{\sqrt{n-1}})] = 0$$

Développements en série entière et équations différentielles (ex. 15 à 19)

Exercice 15: (⋆⋆)

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \cos(\alpha \arcsin x)$.

a) Déterminer une équation différentielle d'ordre 2 dont f est solution.

b) En déduire un développement en série entière de f.

✎ *Solution:*

a) f est solution de l'équation ;

$$(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$$

b) f est solution de l'équation différentielle ci-dessus et vérifie les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
Analyse : Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme S.
En remplaçant dans l'équation différentielle, on trouve après un calcul classique, que la fonction S vérifie sur $]-R\,;R[$ l'équation différentielle proposée et les conditions initiales imposées si et seulement si $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = \frac{n^2-\alpha^2}{(n+2)(n+1)}$$

On en déduit que :

$$a_{2p+1} = 0 \textit{ et } a_{2p} = \frac{(4p^2-\alpha^2)\dots(4-\alpha^2)}{(2p)!}$$

Synthèse : Soit $\sum a_n x^n$ la série entière déterminée par les coefficients précédemment trouvés.
Dans le cas où $\alpha \in 2\mathbb{Z}$, les (a_{2p}) sont nuls à partir d'un certain rang, donc la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence $R = +\infty$.
Dans le cas où $\alpha \notin 2\mathbb{Z}$, pour $x \neq 0$ et $u_p = a_{2p}x^{2p}$, on a

$$\left|\frac{u_{p+1}}{u_p}\right| \to |x|^2$$

donc (d'Alembert) la série entière $\sum a_n x^n$ a un rayon de convergence $R = 1$.
Dans les deux cas, les calculs ont été faits (en les remontant), assurent que la fonction somme de cette série entière est solution de l'équation différentielle

$$(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0$$

et vérifie $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$. Par unicité des solutions à un tel problème de Cauchy, on peut conclure que f est égale à la somme de cette série entière.

Exercice 16: (⋆⋆)

On considère l'équation différentielle : $(E) : ty' + y = 3t^2\cos(t^{3/2})$.

a) Montrer qu'il existe une unique solution v de (E) développable en série entière au voisinage de 0.

b) Trouver l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et en déduire une expression plus simple de v.

✎ *Solution:*

a) Soit v la somme d'une série entière $\sum a_n t^n$ de rayon de convergence $R > 0$.
La fonction v est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R\,;R[$ et :

$$tv'(t) + v(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_n t^n$$

Parallèlement, sur $\mathbb{R}$:

$$3t^2\cos(t^{3/2}) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}3t^{3n+2}.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, v est solution de (E) sur $]-R\,;R[$ si et seulement si :

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{3}{n+1}$$

Ainsi la fonction v est déterminée de manière unique et elle convient bien puisque le rayon de convergence de la série entière définie par les a_n ci-dessus est $R = +\infty$ (d'Alembert).

b) (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
La solution générale de l'équation homogène est $y(t) = \lambda/t$.
Par la méthode de la variation de la constante, on trouve la solution particulière :

$$y(t) = \frac{2\cos(t^{3/2}) + 2t^{3/2}\sin(t^{3/2})}{t}$$

et finalement la solution générale est :

$$y(t) = \frac{2\cos(t^{3/2}) + 2t^{3/2}\sin(t^{3/2})}{t} + \frac{\lambda}{t}$$

Parmi les solutions, la seule pouvant être prolongée par continuité en 0, et donc correspondre à v, est celle obtenue pour $\lambda = -2$.

Exercice 17: ($\star\star\star$)

Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1.3.5\ldots(2n+1)} x^{2n+1}$. Ensemble de définition de f ? Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, et calculer f.

Exercice 18: ($\star\star$)

a) Former de deux façons le développement en série entière au voisinage de 0 de $f : x \mapsto e^{-x^2} \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$.

b) En déduire la relation : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}\binom{2n}{n} = \frac{4^n}{2n+1}$.

Exercice 19: ($\star\star\star$)

Soit (a_n) la suite réelle définie par : $a_0 = a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+1} = a_n - \dfrac{a_{n-2}}{2(n+1)}$ si $n \geqslant 2$.

a) Montrer que les suite (a_n) et (na_n) sont respectivement décroissante et croissante.

b) En déduire le rayon de convergence R de la série entière réelle $\sum a_n x^n$.

c) Montrer que la somme f de cette série est solution d'une équation différentielle linéaire, et calculer f.

d) En déduire une expression de a_n.

Applications des développements en série entière (ex. 20 à 24)

Exercice 20: ($\star$)

a) Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer qu'il en est de même de la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{e^x - 1}$

Exercice 21: ($\star\star$)

Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Exercice 22: (⋆⋆)

1. On définit une suite réelle (u_n) par : $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$.
   En considérant la série entière $\sum u_n x^n$, calculer u_n en fonction de n.
2. On définit une suite réelle (a_n) en posant : $a_0 = 1$, $2a_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k}$.
   En considérant une série entière convenable , calculer a_n en fonction de n.

Exercice 23: (⋆⋆)

En écrivant de deux façons différentes le développement en série entière de la solution f de l'équation différentielle $y' - 2xy = 1$ qui s'annule en 0, calculer la somme :

$$1 - \frac{\binom{n}{1}}{3} + \frac{\binom{n}{2}}{5} - \dots + (-1)^n \frac{\binom{n}{n}}{2n+1}.$$

Exercice 24: (⋆⋆)

1. **a)** Montrer que les deux intégrales $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ existent. En développant en série entière $\frac{1}{1-t}$ et $\frac{1}{1-t^2}$, calculer leurs valeurs.
   b) En déduire : $\int_0^{+\infty} \frac{t}{\operatorname{sh} t}\,\mathrm{d}t$.
2. Calculer : $\int_0^1 \ln(t)\ln(1-t)\,\mathrm{d}t$.