EXERCICES : ESPACES PROBABILISÉS

Révisions de Sup (ex. 1 à 7)

Exercice 1:

On tire 8 cartes simultanément et au hasard dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité pour que figurent (exactement) 2 as parmi ces 8 cartes ? 3 piques ? 2 as et 3 piques ? 2 as ou 3 piques ?

Exercice 2:

$2n$ garçons et $2n$ filles se sont inscrits en classe prépa PCSI dans un lycée comptant deux classes PCSI. On les répartit au hasard dans les deux classes. Quelle est la probabilité que chaque classe comporte autant de filles que de garçons si l'on suppose que les deux classes ont le même effectif ?

Exercice 3:

Quelle est la probabilité que, dans une classe de N élèves, deux élèves au moins aient la même date anniversaire (on ne tiendra pas compte des années bissextiles) ?
Pour quelles valeurs de N cette probabilité est-elle supérieure à $0,9$?

Exercice 4:

$\frac{1}{4}$ d'une population a été vacciné. Parmi les vaccinés, on compte $\frac{1}{12}$ de malades. Parmi les malades, il y 4 non vaccinés pour un vacciné. Quelle est la probabilité pour un non vacciné de tomber malade ?

Exercice 5:

On étudie au cours du temps le fonctionnement d'un appareil obéissant aux règles suivantes :

- si l'appareil fonctionne à l'instant $n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$), il a la probabilité $\frac{1}{6}$ d'être en panne à l'instant n.
- si l'appareil est en panne à l'instant $n-1$, il a la probabilité $\frac{2}{3}$ d'être en panne à l'instant n.

On note p_n la probabilité que l'appareil soit en état de marche à l'instant n.

a) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une relation entre p_n et p_{n-1}.

b) Exprimer p_n en fonction de p_0.

c) Étudier la convergence de la suite (p_n).

Exercice 6:

Une urne contient une boule blanche et une boule rouge.
On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur puis on répète l'opération.

a) Quelle est la probabilité que n premières boules tirées soient rouges ?

b) Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges ?

c) Le résultat précédent reste-t-il vrai si on remet la boule accompagnée de trois autres boules de la même couleur ?

Exercice 7: Les sauts de puce sur une droite

Une puce se trouve à l'instant 0 au point d'abscisse a (a entier), sur un segment gradué de 0 à N (on suppose donc $0 \leqslant a \leqslant N$). A chaque instant, elle fait un bond de $+1$ avec la probabilité p ($0 < p < \frac{1}{2}$), ou un bond de -1 avec la probabilité $q = 1 - p$. Autrement dit, si x_n est l'abscisse de la particule à l'instant n, on a :

$$x_{n+1} = \begin{cases} x_n + 1 & \text{avec probabilité } p \\ x_n - 1 & \text{avec probabilité } 1 - p. \end{cases}$$

Le processus se termine lorsque la particule atteint une des extrémités du segment (c'est-à-dire s'il existe x_n avec $x_n = 0$ ou $x_n = N$).

a) On note u_a la probabilité pour que la particule partant de a, le processus s'arrête en 0.

  i) Que vaut u_0 ? u_N ?

  ii) Montrer que si $0 < a < N$, alors $u_a = pu_{a+1} + qu_{a-1}$.

  iii) En déduire l'expression exacte de u_a.

b) On note v_a la probabilité pour que la particule partant de a, le processus s'arrête en N. Reprendre les questions précédentes avec v_a au lieu de u_a.

c) Calculer $u_a + v_a$. Qu'en déduisez-vous ?

Espaces probabilisés (ex. 8 à 12)

Exercice 8: (✍)

Soit $a \in]1\,;+\infty[$ et $\zeta(a) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$.

a) Montrer qu'en posant : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big(\{n\}\big) = \dfrac{1}{\zeta(a)n^a}$ on définit une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

b) Calculer $\mathbb{P}(2\mathbb{N}^*)$ et plus généralement $\mathbb{P}(k\mathbb{N}^*)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9: Inégalité de Bonferroni

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et $A_1, \ldots, A_n$ des évènements. Démontrer que

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - (n-1).$$

Indication : procéder par récurrence sur n.

Exercice 10:

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements deux à deux incompatibles d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$.

Exercice 11:

Soit Ω un ensemble non dénombrable. On introduit

$$\mathcal{A} = \left\{A \subset \Omega \mid A \text{ ou } \bar{A} \text{ est au plus dénombrable}\right\}$$

a) Vérifier que $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω.

b) Pour $A \in \mathcal{A}$, on pose

$$\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est au plus dénombrable} \\ 1 & \text{si } \bar{A} \text{ est au plus dénombrable} \end{cases}$$

Vérifier que $\mathbb{P}$ définit une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Exercice 12: Lemmes de Borel-Cantelli

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
On considère l'évènement

$$A = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant p} A_n$$

dont la réalisation signifie qu'une infinité des évènements A_n sont réalisés.

1. On suppose la convergence de la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$.
   Montrer que $\mathbb{P}(A) = 0$.
2. On suppose maintenant que les évènements A_n sont mutuellement indépendants et que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ diverge.
   Montrer que $\mathbb{P}(A) = 1$.

Calculs de probabilités sur un univers infini (ex. 13 à 18)

Exercice 13:

On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6.
Quelle est la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs ?

Écrire un petit script Python pour simuler cette expérience.

Exercice 14:

On dispose d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir ≪ face ≫ est $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.

a) Soit n un entier naturel non nul. On effectue n lancers indépendants de la pièce décrite ci dessus.
On note F_k l'événement ≪ on obtient face au k-ième lancer ≫ et P_k l'événement ≪ on obtient pile au k-ième lancer ≫.
On cherche à calculer la probabilité qu'au cours de ces n lancers ≪ face ≫ ne soit jamais suivi de ≪ pile ≫. On note A_n cet événement.

- **i)** Exprimer A_n en fonction des événements F_k et P_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$.
- **ii)** En déduire $P(A_n)$. (Au cours du calcul on sera amené à distinguer le cas $p = \frac{1}{2}$ et $p \neq \frac{1}{2}$.)

b) Si l'on admet que l'on peut lancer indéfiniment la pièce, est-il possible que ≪ face ≫ ne soit jamais suivi de ≪ pile ≫.
(*Indication :* on notera A l'événement ≪ face n'est jamais suivi de pile ≫ et on exprimera A à l'aide des A_n, $n \in \mathbb{N}^*$.)

Exercice 15:

On lance une pièce avec la probabilité p de faire ≪ Pile ≫. On note A_n l'événement

≪ on obtient pour la première fois deux piles consécutifs lors du n-ième lancer ≫

et l'on désire calculer sa probabilité a_n.

a) Déterminer a_1, a_2 et a_3.

b) Exprimer a_{n+2} en fonction de a_n et a_{n+1} pour $n \geqslant 1$ (considérer ce qui s'est passé au 1er lancer).

c) Justifier qu'il est quasi-certain d'obtenir deux piles consécutifs.

d) Déterminer le nombre d'essais moyen pour obtenir deux piles consécutifs.

e) Écrire un petit script Python pour simuler cette expérience.

Exercice 16:

Deux joueurs de football tirent chacun leur tour un penalty. Le premier qui marque a gagné. Le joueur qui commence a la probabilité p_1 de marquer à chaque tour et le second la probabilité p_2 (avec $p_1, p_2 > 0$)

a) Quelle est la probabilité que le premier joueur gagne ?

b) Montrer qu'il est quasi-certain que le jeu se termine.

c) Pour quelle(s) valeur(s) de p_1 existe-t-il une valeur de p_2 pour laquelle le jeu est équitable ?

Exercice 17:

Deux joueurs A et B lancent deux dés parfaits.
A commence. Si la somme des points qu'il obtient est 6, il a gagné.
Sinon B lance les dés et si la somme des points qu'il obtient est 7, il a gagné.
Sinon A rejoue et ainsi de suite.

a) Calculer la probabilité des événements ≪ obtenir un total de 6 ≫ et ≪ obtenir un total de 7 ≫.

b) On introduit les événements A_n : ≪ le joueur A gagne à son n-ième lancer ≫, B_n : ≪ le joueur B gagne à son n-ième lancer ≫, F : ≪ A gagne le jeu ≫ et G : ≪ B gagne le jeu ≫.
Exprimer les événements F et G à l'aide des événements A_n et B_n

c) En déduire si vous préférez être le joueur A ou B.

Exercice 18:

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une série de tirages aléatoires d'une boule jusqu'à obtenir une boule noire. A chaque tirage amenant une boule blanche, on replace la boule blanche puis on multiplie par 2 le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après la remise de la boule, puis on procède au tirage suivant.
L'objectif de l'exercice est d'évaluer la probabilité de ne jamais obtenir de boule noire, et de déterminer en particulier si cette probabilité est nulle.

1. Pour $n \geqslant 1$, on note B_n l'événement : ≪ Les n premiers lancers ont lieu et n'amènent pas de boules noires ≫. On note $u_n = \mathbb{P}(B_n)$.

a) Démontrer, sans chercher à calculer u_n, que la suite (u_n) est convergente.

b) Démontrer que $u_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}$.

2. On note B_∞ l'événement : ≪ l'expérience ne s'arrête jamais ≫.

a) Démontrer que $\mathbb{P}(B_\infty) = \lim_{n \to +\infty} u_n$.

b) Démontrer que $\mathbb{P}(B_\infty) > 0$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆ ⋆
⋆ ⋆
⋆